Comentário: "Visualização" de tensores gerais

- A visualização do tensor tensão de Cauchy em 3D não é difícil, mas em relatividade geral o espaço a ser considerado é 4D e há tensores de diferentes postos.
- Um tensor de posto 2 é uma estrutura geométrica que, quando atua num vetor, produz outro vetor. Isto pois $\mathbf{T} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$, ou seja $T^i = \sigma^i{}_j n^j$, assim $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}$ atua em $\mathbf{n}$ e produz $\mathbf{T}$.
- É difícil visualizar $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}$ sozinho, mas especificada a direção $\mathbf{n}$ em que a força atua, o que $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}$ faz é produzir o vetor $\mathbf{T}$.
- O que seria um tensor de posto 3? Sequer há notação de setinha para esse caso, mas é fácil intuir que é um objeto geométrico que, quando atua em dois vetores, produz um novo vetor. Por exemplo: $A^i = f^i{}_{jk} B^j C^k$.
- Assim podemos falar de tensor de posto n em uma dimensão D qualquer.
- Por "objeto geométrico" quero dizer que é uma grandeza que existe independentemente da escolha do sistema de coordenadas (isto é um teorema devido a Cauchy).

Comentário: Breve apresentação sobre o espaço vetorial dual

- Seja $v \in V$, em que V é espaço vetorial (espaço vetorial definido como vocês viram em álgebra linear, inclui o espaço de vetores euclidianos, mas é mais geral).

- Seja $f(v) \in \mathbb{R}$, isto é, $f : V \to \mathbb{R}$.

- *Teorema* (não demostrado): O conjunto de todas as funções $f : V \to \mathbb{R}$ lineares em V forma um espaço vetorial.

  Definição: Esse espaço vetorial é chamado de espaço dual a V e é denotado por V^*.

- Exemplo: Seja $v \in V$ dado por $v = v^\alpha e_\alpha$, em que $\{e_\alpha\}$ é base de V. Ou seja, $\{v^\alpha\}$ é um conjunto de números reais.

  Seja $f(v) = f_\alpha v^\alpha$, em que $f_\alpha \in \mathbb{R}$. Logo $f : V \to \mathbb{R}$ e $f(v)$ é linear em v, logo $f \in V^*$.

  Como V^* é espaço vetorial e mostra-se que ele tem a mesma dimensão de V, podemos escrever $f = f_\alpha e^\alpha$, em que $\{e^\alpha\}$ é base de V^*.

  Note que $e^\alpha \neq e_\alpha$, cada um pertence a espaços vetoriais diferentes.