Convenção da soma e produto interno

- **Exercício 3:** Considere os seguintes dados:

  a) $F_{\mu\nu}$ descreve um tensor anti-simétrico no espaço-tempo (i.e., $F_{\mu\nu} = - F_{\nu\mu}$);

  b) a métrica é assumida ser de Minkowski, $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\,(-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$;

  c) $F^{i0} = E^i/c$, sendo $\mathbf{E} = E^i \mathbf{e}_i$ o campo elétrico;

  d) $F_{ij} = - \epsilon_{ijk} B^k$, em que $\mathbf{B} = B^i \mathbf{e}_i$ é o campo magnético.

  Mostre que duas das equações de Maxwell podem ser expressas por

  $$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu,$$

  em que μ_0 é a permeabilidade do vácuo, $(J^\mu) = \begin{pmatrix}\rho c & \mathbf{J}\end{pmatrix}$, sendo $\mathbf{J}$ a corrente espacial e ρ a densidade de carga.

Como encontrar o tensor de Einstein?

- Dada uma métrica cujos índices estão associados ao espaço-tempo ($g_{\mu\nu}$), para encontrar o tensor de Einstein basta fazer uma sequência de derivações e somas, como abaixo indicadas:

$$\Gamma^{\mu}_{\ \nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}(\partial_\lambda g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\lambda\kappa} - \partial_\kappa g_{\nu\lambda}),$$

$$R^{\mu}_{\ \nu\lambda\kappa} = \partial_\lambda \Gamma^{\mu}_{\ \nu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^{\mu}_{\ \nu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\ \nu\kappa} - \Gamma^{\mu}_{\ \kappa\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\ \nu\lambda},$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\ \mu\lambda\nu}, \qquad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

- Isto é o suficiente para definir o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Basta seguir esses procedimentos algébricos para encontrá-lo.
- Veremos um pouco sobre “visualização" de tensores no próximo slide.