Índices em cima e embaixo

- Para coordenadas cartesianas, a métrica e sua inversa são iguais, mas em geral as componentes da inversão serão diferentes.
- É útil, e largamente usado, denotar as componentes da inversa da métrica g_{ij} por g^{ij}.
- Assim escrevemos $\sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$, em que δ_k^i vale 1 se $i = k$ e zero caso contrário (ou seja, a dental de Kronecker é agora denotada com um índice embaixo e outro em cima).
- É útil considerar que todas as somas de índices do espaço ocorram somente entre um índice em cima e outro embaixo (tal como na soma acima envolvendo a inversa da métrica).
- Consequentemente $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$.
- Como dx^i é a componente de um vetor (infinitesimal), usaremos índice em cima para as componentes de todos os vetores.

Convenção da soma e produto interno

- Como calcular o produto de dois vetores? Sejam $\mathbf{A} = \sum_i A^i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{B} = \sum_i B^i \mathbf{e}_i$ dois vetores, representados por meio da base $\{\mathbf{e}_i\}$ (em coordenadas cartesianas pode-se usar $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{i}}$ e $\mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{j}}$, mas $\{\mathbf{e}_i\}$ pode ser uma base qualquer obtida a partir de transformações de coordenadas da base cartesiana).

- Notem que o somatório é redundante, pois sempre iremos somar quando houver índices do espaço repetidos, e quando isso ocorrer sempre um estará em cima e outro embaixo, logo usamos $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{B} = B^i \mathbf{e}_i$.

- Mas como fazer o produto (interno) entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$? Nota-se que não se pode usar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq A^i B^i$.