A métrica: exemplo euclidiano

- Ao mudarmos as coordenadas, as componentes da métrica mudam (semelhantemente, as componentes de vetores mudam ao mudarmos as coordenadas).
- Por exemplo, em coordenadas polares pode-se encontrar que a métrica toma a seguinte forma:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

- Usando $dx_1 = dr$ e $dx_2 = d\theta$, temos que

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

- As distância entre dois pontos com uma diferença infinitesimal de θ é $ds = r d\theta$.
- **Exercício 2:** Encontre a métrica em coordenadas esféricas e estabeleça sua relação com o jacobiano.

Índices em cima e embaixo

- Para coordenadas cartesianas, a métrica e sua inversa são iguais, mas em geral as componentes da inversão serão diferentes.

- É útil, e largamente usado, denotar as componentes da inversa da métrica g_{ij} por g^{ij}.

- Assim escrevemos $\sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$, em que δ_k^i vale 1 se $i = k$ e zero caso contrário (ou seja, a dental de Kronecker é agora denotada com um índice embaixo e outro em cima).

- É útil considerar que todas as somas de índices do espaço ocorram somente entre um índice em cima e outro embaixo (tal como na soma acima envolvendo a inversa da métrica).

- Consequentemente $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$.

- Como dx^i é a componente de um vetor (infinitesimal), usaremos índice em cima para as componentes de todos os vetores.