

# Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- A eq. de Klein-Gordon tem o mérito de ser relativística, mas têm dois problemas para usá-la para partículas, como o elétron.
- O mais evidente é que não há nada nessa equação sobre spin. Ela no máximo se aplicaria a partículas de spin nulo.
- O problema mais grave é como interpretar as soluções dessa equação. A equação de Schroedinger conserva a probabilidade. Em particular, há uma equação de continuidade associada à densidade de probabilidade da posição da partícula:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \text{ com } \rho = |\Psi|^2 \text{ e } \mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m}(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi).$$

- A eq. de Klein-Gordon não satisfaz essa conservação de probabilidade.

**Exercício 6:** i) Verifique que a eq. de Schroedinger leva à eq. da continuidade para a densidade de probabilidade. ii) Mostre que  $|\Phi|^2$ , em que  $\Phi$  satisfaz a eq. de Klein-Gordon, não satisfaz uma equação da continuidade.

# Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- Buscando resolver esses problemas, [Dirac desenvolveu nova equação relativística](#). Contudo, a forma dela é um tanto mais complicada que a de Klein-Gordon ou Schroedinger.

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0,$$

Acima, cada  $\gamma^\mu$  é uma matriz 4x4, logo há uma identidade 4x4 implícita junto de  $mc$  e  $\psi$  é um vetor complexo de 4 componentes. É eq. diferencial de *primeira ordem no tempo e no espaço*.

- Lidar em detalhes com esta equação está longe de nossos objetivos, só escrevo ela acima para terem ciência da forma e do que ela depende.
- Essa abordagem com matrizes possibilitou a inclusão de spin, mas ainda não resolveu de imediato o problema da conservação de probabilidade.
- Paralelamente, um outro problema notado por Dirac foi a possibilidade de estados de energia negativa. Isto está associado à equação relativística de energia ser quadrática, admitindo ambos os sinais.
- Dirac desenvolveu uma interpretação que hoje é chamada de “mar de Dirac”. Comentar.