Movimento Browniano

$\mathbf{R}_N \cdot \mathbf{R}_N = (\mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}_N) \cdot (\mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}_N) = \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{R}_{N-1} + 2\mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_N \cdot \mathbf{L}_N.$

Como $\langle \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L}_N \rangle = 0$ *(em dois slides mais há uma revisão sobre o assunto)* e usando indução, vem

$$\langle R_N^2 \rangle = \left\langle \sum_i^N L_i^2 \right\rangle = \langle N L^2 \rangle = N L^2 \,.$$

Assim, vemos que a distância média é

$$\langle R_N \rangle = \sqrt{N} L \,.$$

■

Movimento Browniano

- **Exercício 1:**
  a) Refazer o exemplo anterior para o caso de passeio aleatório Gaussiano. Ou seja, considere que $\langle \mathbf{L}_i \rangle = \mathbf{0}$ e $\langle \mathbf{L}_i^2 \rangle = L^2$, consequentemente, a variância é $\sigma^2 = L^2$.
  b) Há ainda uma outra forma de fazer este exercício ainda mais simples, ao invés de refazer o caso anterior, usar propriedades de distribuições normais (ou Gaussiana): a soma de variáveis aleatórias distribuídas normalmente é também uma variável aleatória distribuída normalmente.

- **Exercício 2**: Explicar o movimento Browniano. Uma sugestão, dentre outras possíveis: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_41.html (ver última seção desse pdf).