Lembrar que

$$p^i p_i = \sum_{i=1}^{3} p^i p_i = -\sum_{i=1}^{3} p^i p^i$$

Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- Para uma partícula livre de massa m, a eq. de Schroedinger nos diz que

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi = 0\,.$$

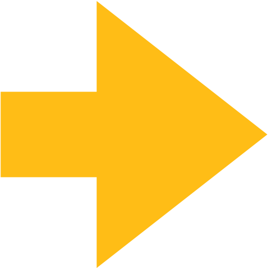
- Nota-se que a equação acima equivale a $E = p^2/(2m)$, com

$$\mathbf{p} \to -i\hbar\nabla \;\text{ e }\; E \to i\hbar\partial_t\,.$$

- A relação relativística entre E e $\mathbf{p}$, usando a assinatura $(+ \quad - \quad - \quad -)$ é dada por

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2\,,\text{em que } (p^\mu) = \begin{pmatrix} E/c & p^1 & p^2 & p^3 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{E^2}{c^2} - \sum_i p^i p^i = m^2c^2 \qquad\qquad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar}\right)\Phi = 0.$$



Não uso Ψ aqui
pois a interpretação
é diferente.

Equação de Klein-Gordon
Publicada em 1926 em dois artigos independentes

Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- Para uma partícula livre de massa m, a eq. de Schroedinger nos diz que

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi = 0\,.$$

- Nota-se que a equação acima equivale a $E = p^2/(2m)$, com

$$\mathbf{p} \to -i\hbar\nabla \ \text{ e } \ E \to i\hbar\partial_t\,.$$

- A relação relativística entre E e $\mathbf{p}$, usando a assinatura $(+\ \ -\ \ -\ \ -)$ é dada por

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2\,, \text{em que } \ (p^\mu) = \begin{pmatrix} E/c & p^1 & p^2 & p^3 \end{pmatrix}.$$

Não uso Ψ aqui pois a interpretação é diferente.

$$\frac{E^2}{c^2} - \sum_i p^i p^i = m^2c^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar}\right)\Phi = 0.$$

Lembrar que

$$p^i p_i = \sum_{i=1}^{3} p^i p_i = -\sum_{i=1}^{3} p^i p^i$$

Equação de Klein-Gordon
Publicada em 1926 em dois artigos independentes

Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- A eq. de Klein-Gordon tem o mérito de ser relativística, mas têm dois problemas para usá-la para partículas, como o elétron.
- O mais evidente é que não há nada nessa equação sobre spin. Ela no máximo se aplicaria a partículas de spin nulo.
- O problema mais grave é como interpretar as soluções dessa equação. A equação de Schroedinger conserva a probabilidade. Em particular, há uma equação de continuidade associada à densidade de probabilidade da posição da partícula:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \text{com } \rho = |\Psi|^2 \text{ e } \mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m}(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi).$$

- A eq. de Klein-Gordon não satisfaz essa conservação de probabilidade.

Exercício 6: i) Verifique que a eq. de Schroedinger leva à eq. da continuidade para a densidade de probabilidade. ii) Mostre que $|\Phi|^2$, em que Φ satisfaz a eq. de Klein-Gordon, não satisfaz uma equação da continuidade.