Movimento Browniano

- Para entender a física associada, em parte é necessário saber sobre...
- **Passeio aleatório** (*random walk*)

Considere uma sequência de N passos aleatórios num espaço 3D $\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, ..., \mathbf{L}_N\}$, com $\langle \mathbf{L}_i \rangle = \mathbf{0}$ e $\mathbf{L}_i^2 = L^2$, $\forall i$. Qual a média da distância do ponto final ao ponto inicial do passeio?

Seja o vetor posição do início ao fim do passeio dado por

$$\mathbf{R}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_i \, .$$

Note que a posição média é nula $\langle \mathbf{R}_N \rangle = \mathbf{0}$. Contudo, $\langle \mathbf{R}_N^2 \rangle \neq 0$. A média da distância é o mesmo que $\langle R_N^2 \rangle^{1/2} = \langle R_N \rangle$, logo precisamos calcular $\langle R_N^2 \rangle$.

Movimento Browniano

$\mathbf{R}_N \cdot \mathbf{R}_N = (\mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}_N) \cdot (\mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}_N) = \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{R}_{N-1} + 2\mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_N \cdot \mathbf{L}_N$.

Como $\langle \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L}_N \rangle = 0$ *(em dois slides mais há uma revisão sobre o assunto)* e usando indução, vem

$$\langle R_N^2 \rangle = \left\langle \sum_i^N L_i^2 \right\rangle = \langle N L^2 \rangle = N L^2 \,.$$

Assim, vemos que a distância média é

$$\langle R_N \rangle = \sqrt{N} L \,.$$

■