19

- **Exemplo:** Um fio longo conduz uma correte uniforme que varia lentamente no tempo, denotada por $I(t)$. Determine o campo elétrico induzido ao redor do fio.

- **Sol. (continuação) :** Usaremos agora $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ diretamente na forma diferencial.

Como $\mathbf{B} \parallel \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\mathbf{E} = \mathbf{E}(s, t)$, a eq. de Faraday implica que $-\partial_s E_z = -\dot{B}_\theta$ e $\partial_s(sE_\theta) = 0$. Da primeira equação temos que

Como determinar d? Sob o ponto de vista de eqs. diferenciais, encontramos a solução, falta só a condição de contorno. Contudo, não tem como dar essa condição de contorno, pois a solução encontrada não faz sentido para qualquer s. Só sabemos que $d > s$. Note o sinal de E_z.

Exemplo de indução elétrica - Sol. diferencial

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right] \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho V_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\partial_s E_z = \frac{\mu_0}{2\pi s} \dot{I}$$

$$\Rightarrow \; E_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \dot{I} \ln \frac{s}{d}$$

Em que d é uma constante de integração com dimensão de distância. É a mesma resposta obtida via integral.

Exemplo de indução elétrica - Sol. diferencial

- **Exemplo:** Um fio longo conduz uma correte uniforme que varia lentamente no tempo, denotada por $I(t)$. Determine o campo elétrico induzido ao redor do fio.
- **Sol. (continuação) :** Usaremos agora $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ diretamente na forma diferencial.

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho V_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Como $\mathbf{B} \parallel \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\mathbf{E} = \mathbf{E}(s,t)$, a eq. de Faraday implica que $-\partial_s E_z = -\dot{B}_\theta$ e $\partial_s(sE_\theta) = 0$. Da primeira equação temos que

$$\partial_s E_z = \frac{\mu_0}{2\pi s}\dot{I} \qquad \Rightarrow \quad E_z = \frac{\mu_0}{2\pi}\dot{I}\ln\frac{s}{d}$$

Em que d é uma constante de integração com dimensão de distância. É a mesma resposta obtida via integral.

Como determinar d? Sob o ponto de vista de eqs. diferenciais, encontramos a solução, falta só a condição de contorno. Contudo, não tem como dar essa condição de contorno, pois a solução encontrada não faz sentido para qualquer s. Só sabemos que $d > s$. Note o sinal de E_z.

Exemplo de indução elétrica - Sol. diferencial

- **Exemplo:** Um fio longo conduz uma correte uniforme que varia lentamente no tempo, denotada por $I(t)$. Determine o campo elétrico induzido ao redor do fio.
- **Sol. (continuação) :** E as demais direções, como ficam? No exemplo da integral assumimos que não contribuiriam. Podemos avaliá-las diretamente das eqs's diferenciais?

Já vimos que a eq. de Faraday também fornece $\partial_s(sE_\theta) = 0$. Logo a solução geral seria $E_\theta = E_{\theta 0}/s$.

Mostra-se que $E_{\theta 0} = 0$. Além de ser algo estranho fisicamente, seguem duas formas de demonstrar isso: i) usando localmente um sistema cartesiano de coordenadas, ii) considerando uma integração numa área com s constante.

Segundo o teorema de Helmholtz, saber o rotacional de $\mathbf{E}$ não é suficiente para determinar esse campo, logo na resolução por integração implicitamente usamos em algum momento que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Em coordenadas cilíndricas, essa equação implica que $\partial_s(sE_s) = 0$. Logo, em princípio, poderíamos ter $E_s \neq 0$. Contudo, a resposta correta final é $E_s = 0$.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$