

Estrutura da Matéria Avançada

- Partículas e Campos -

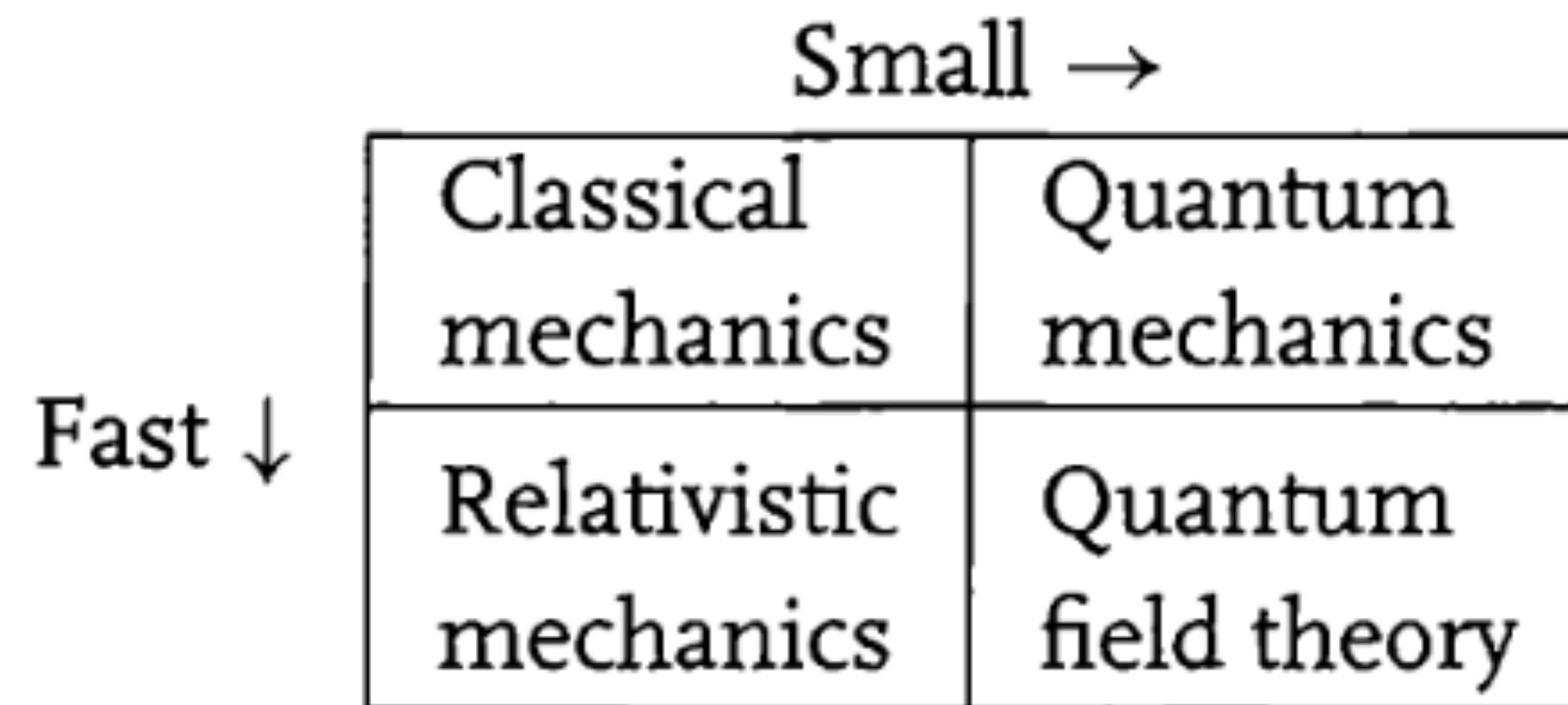
Capítulo 12 do Física Moderna / Tipler

Prof. Davi C. Rodrigues
Período 2021/1 (EARTE)

Introdução

- Aqui vamos estudar a estrutura fundamental da “matéria”.
- O próprio conceito de matéria é algo fora do usual, quando se considera o atual modelo padrão de partículas e campos.
- Veremos que “campos” são essenciais para entender o que é a matéria sob o ponto de vista que atualmente entendemos como fundamental.
- A teoria quântica de campos (TQC) foi gradualmente sendo desenvolvida após a MQ, com muitas idas e vindas. TQC está longe de ser uma imediata extensão de MQ, é uma nova disciplina. O significado de matéria em TQC é diferente.
- Uma importante equação de TQC, a eq. de Klein Gordon, chegou a ser considerada por Schroedinger (há alguns argumentos simples que levam a ela), mas na época ninguém sabia como interpretá-la.

Introdução



- O esboço acima é do livro *Introduction to elementary particles*, do D. Griffiths. Não é um esquema rigoroso, mas dá a grosso modo uma relação entre as 4 áreas indicadas.
- Saberiam dizer os pontos fortes e fracos do esboço acima?
- Observação: muito do contexto histórico que aqui trato pode ser encontrado no capítulo 1 do livro do Griffiths acima citado.

O que são partículas?

- Em geral são "minúsculas porções de matéria". Entretanto, não estamos aqui interessados em qualquer forma de partícula, mas sim das partículas mais elementares possíveis, as "partículas fundamentais", a partir das quais todas as demais seriam formadas.
- A visão de que toda a matéria macroscópica é composta por "partículas fundamentais" tem certas raízes na teoria atomista (séculos VI ou V a.C.).
- Como veremos, o entendimento atual do que são os fundamentos da matéria partilham da visão atomista mais pelo reducionismo e localidade do que o pelo conceito de átomo em si, como veremos.
- Na antiguidade houve não uma, mas várias teorias atomistas. O grego Demócrito é comumente associado ao atomismo em seus princípios, mas, além de outros gregos, na Índia variações da teoria atomista também apareceram (e talvez antes).

O que são partículas?

- A "teoria" atomista diz que tudo o que existe são átomos e vazio.
- Os átomos seriam o menor elemento de dada matéria, sendo indivisíveis e ocupariam lugar no espaço. Suas formas geométricas estariam intimamente ligadas com suas propriedades macroscópicas. Suas interações seriam mecânicas.
- Haveria vários tipos de átomos, por exemplo, água e terra seriam feitos de átomos diferentes. Também, como exemplo, substâncias amargas seriam feitas de átomos mais angulosos que provocariam a sensação de amargor ao passar pela língua; já as doces seriam mais arredondadas. (<https://books.google.com.br/books?id=o1feO3r1sYEC&hl=pt-BR>)
- Dentre as várias visões antagônicas à atomista, Platão e Aristóteles tinham bases diferentes. Cito a teoria de Mínimo Natural de Aristóteles. Essa não vê a matéria como átomos e vácuo, mas sim como um contínuo. A carne, por exemplo, seria uma matéria contínua, sem vácuo. O vácuo não poderia existir, todo o espaço seria preenchido por algo. E, ao se tentar sucessivamente dividir a carne, chegaria-se até um elemento mínimo a partir do qual nova divisão é possível, mas o resultado deixaria de ser carne.

O que são partículas?

- A visão atual é bem diferente de todas essas, e pode-se encontrar um pouco da atual em várias dessas visões qualitativas antigas.
- Ressalto que isso não quer dizer que os gregos antigos anteviram em parte os desdobramentos atuais, apenas que trataram de grande diversidade de especulações. Especulações que, para a época, eram relevantes. A ideia de associar especulações com testes experimentais estava longe de ser estabelecida. Cabe ressaltar que essas formas de pensamento da época tinham consequências para questões éticas e morais (e às vezes uma visão era defendida com respeito a outra pelas implicações morais; a ideia de fazer experimentos ainda estava distante).
- O atomismo indicava que o todo seria consequência das partes, haveria unidades básicas as quais gerariam o todo. Esta me parece ser a consequência mais duradoura do atomismo.
- Paralelamente, é bom lembrar que a astronomia da época se fundia com a astrologia, e para grande parte da população saber a posição precisa dos astros tinha como finalidade entender mensagens dos deuses, prever o futuro de acontecimentos políticos... Sobre isso e o surgimento da ciência, um bom livro de divulgação é este do Weinberg.

O que são partículas?

- Moléculas: termo foi cunhado por Amedeo Avogadro, embora não houvesse ainda uma distinção entre molécula e o que hoje entendemos por átomo.
- A lei de proporções de Dalton foi o início do entendimento do que seria molécula.
- Ainda assim, até então, nada indicava diretamente que líquidos ou sólidos poderiam ser feitos de “partículas e vácuo”.
- O auge da visão atomista, entendo eu, veio com a descoberta do movimento Browniano, sua explicação e consequências dessa.

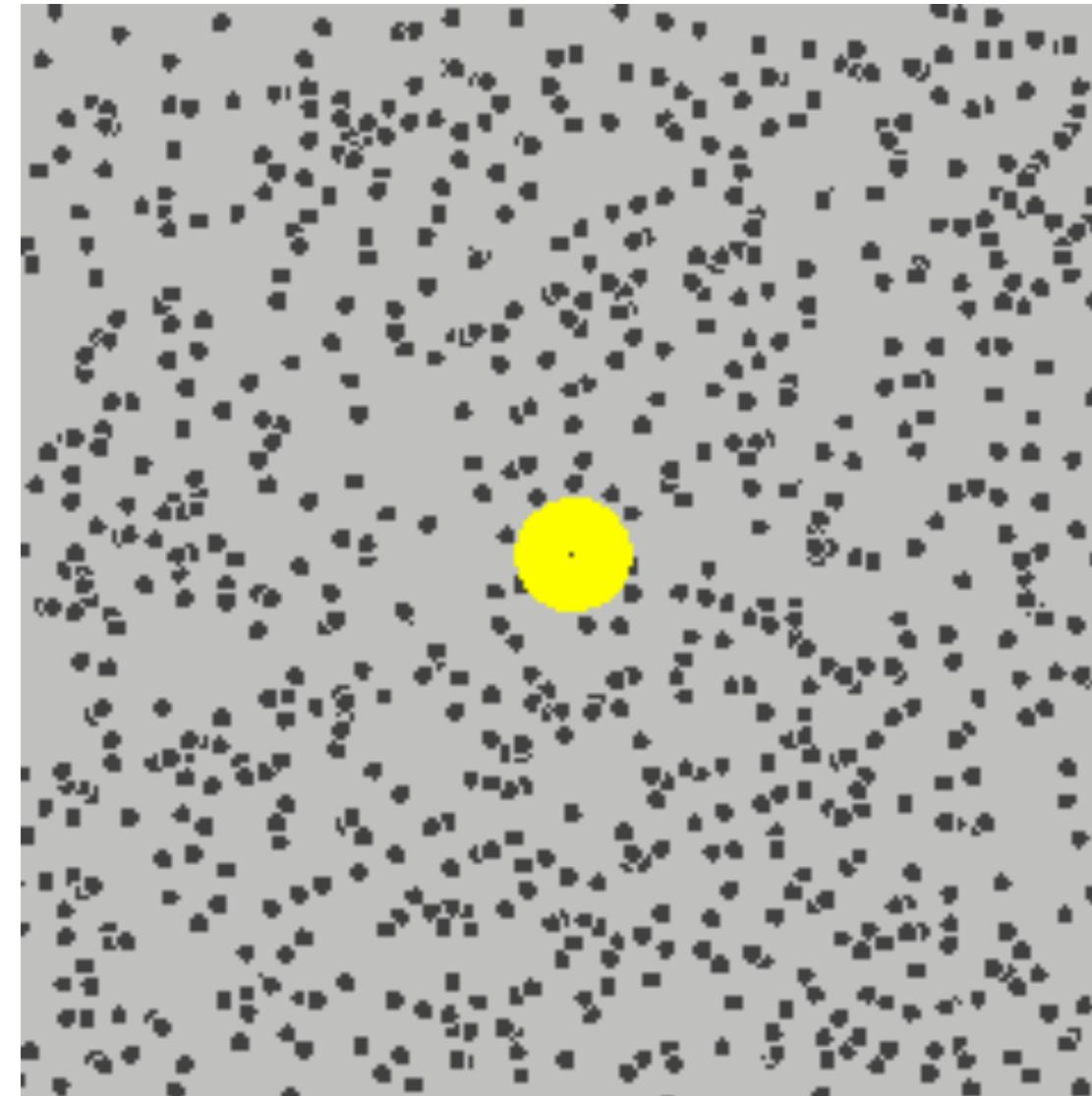
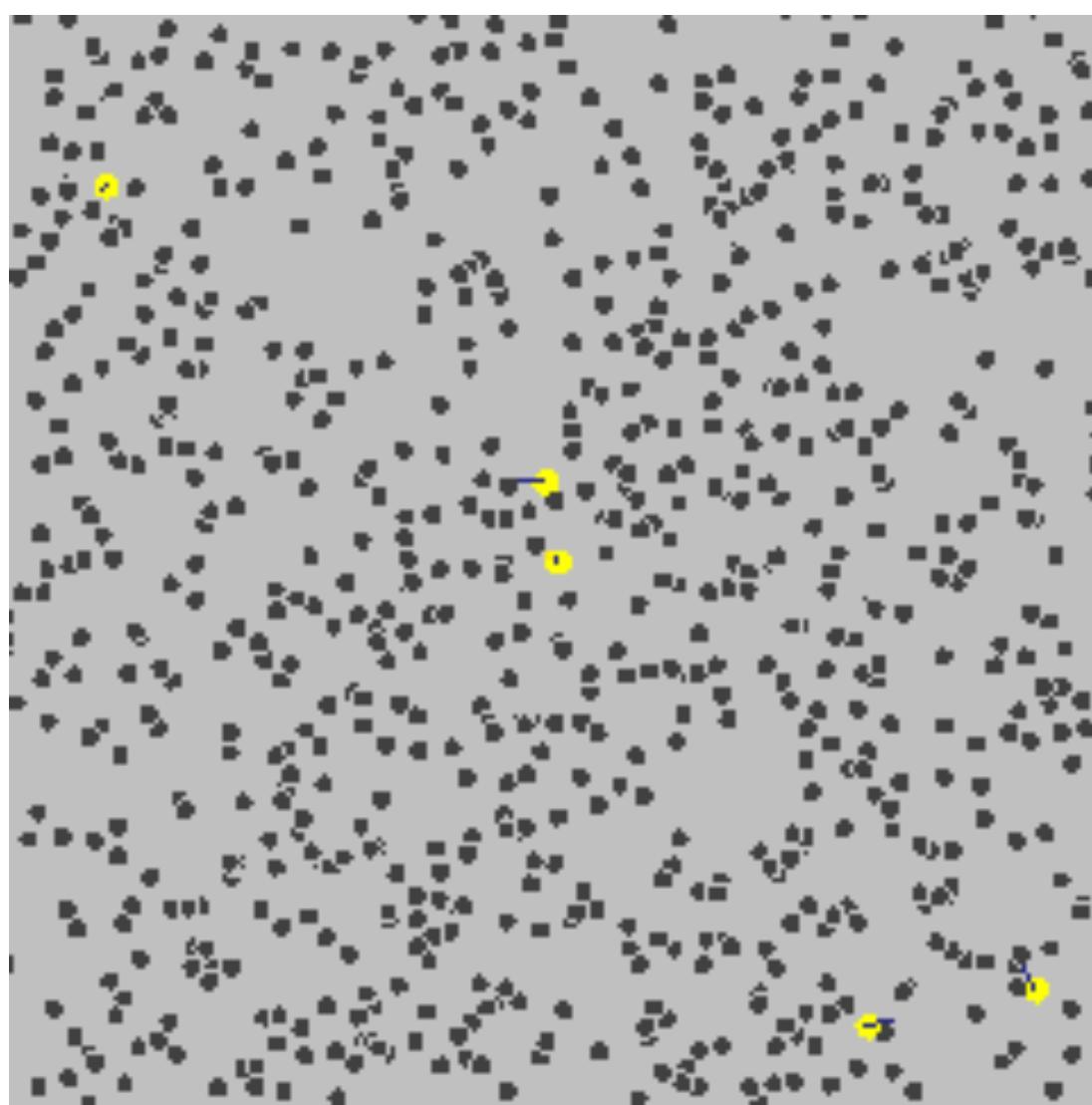
Movimento Browniano

- Imagine que a água seja composta por átomos (no sentido filosófico de atomismo).
- Embora ela tenha a aparência de fluido, ela seria composta por muitas partículas em constante movimento caótico.
- Na ausência de algum microscópio capaz de mostrar diretamente a constituição da água, poderia-se ver o movimento de pequenas partículas na água.
- Se forem partículas suficientemente pequenas e de pequena massa, porém grandes o suficiente para poderem ser vistas, as colisões dos "átomos" de água causaria um movimento caótico nessas partículas. Esse movimento caótico seria diferente do movimento do fluxo macroscópico da água.

Movimento Browniano

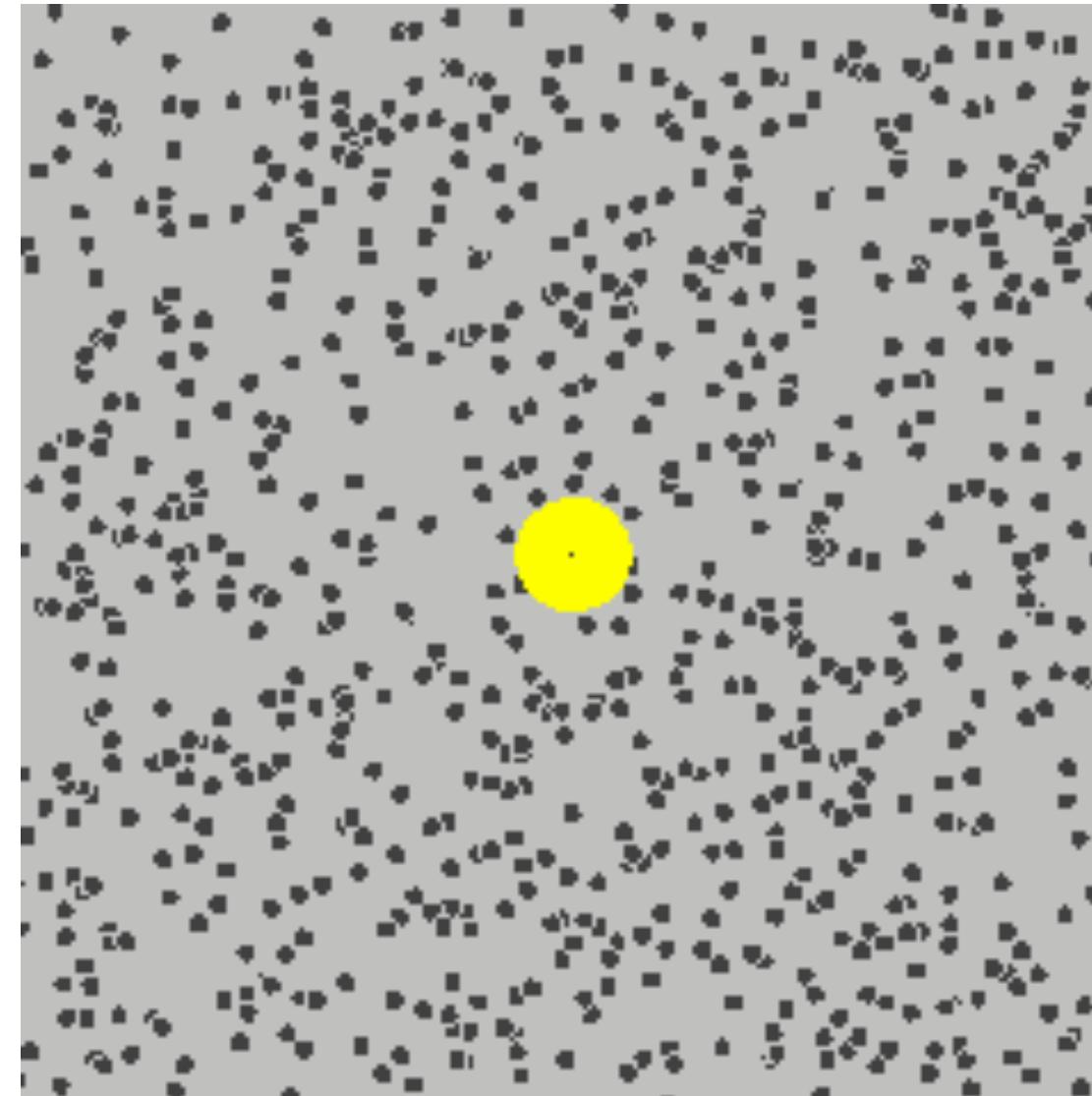
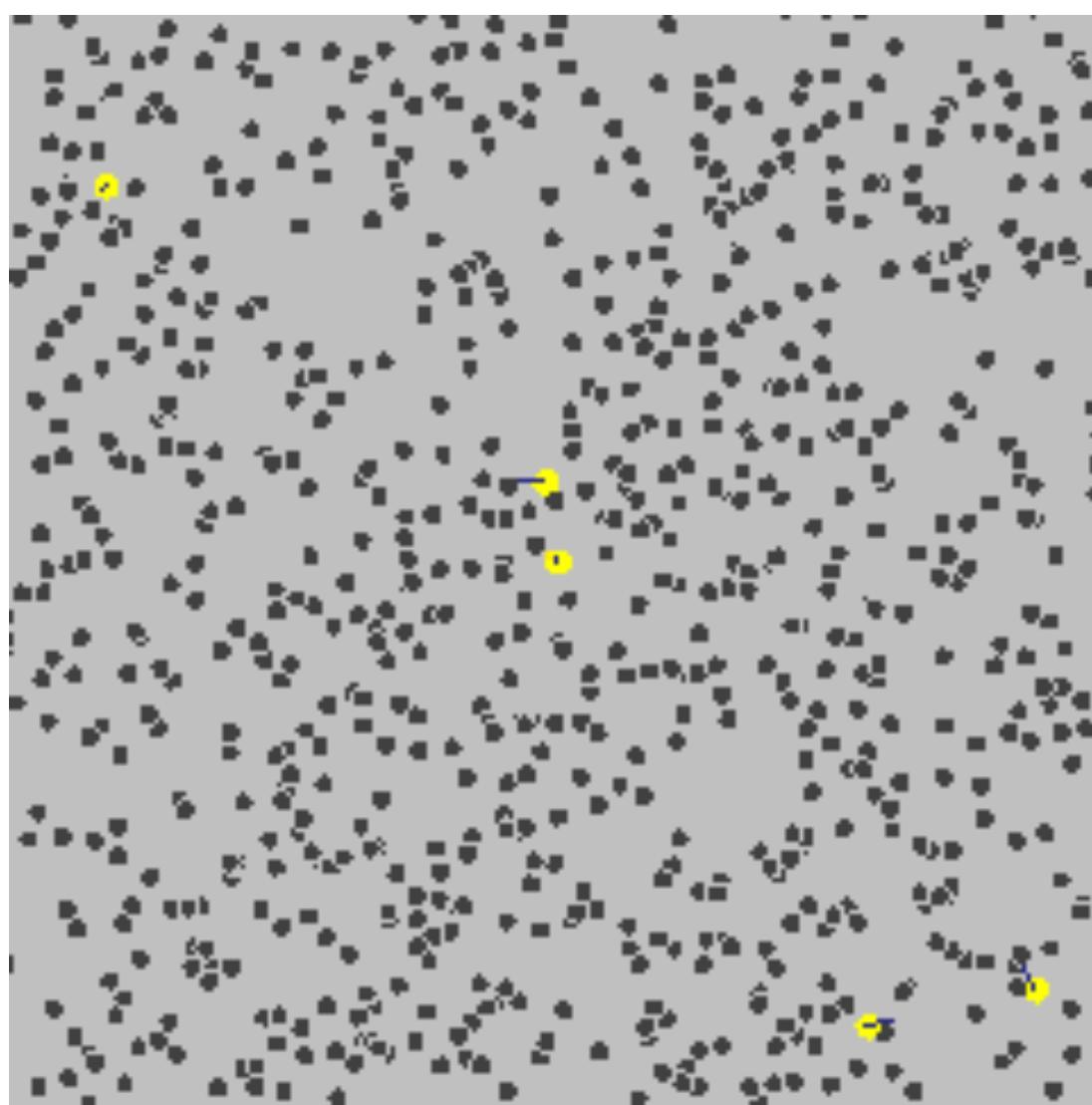
- Em 1827, o botânico Robert Brown observa um movimento caótico em partículas de pólen na água.
- Na época, a causa desse movimento (um movimento caótico de partículas na água) era desconhecida. Esse movimento foi chamado de movimento Browniano.
- Em 1905 Einstein publica um artigo (<https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans/137>) em que o movimento Browniano seria consequência das colisões das partículas de pólen com moléculas de água.

Movimento Browniano



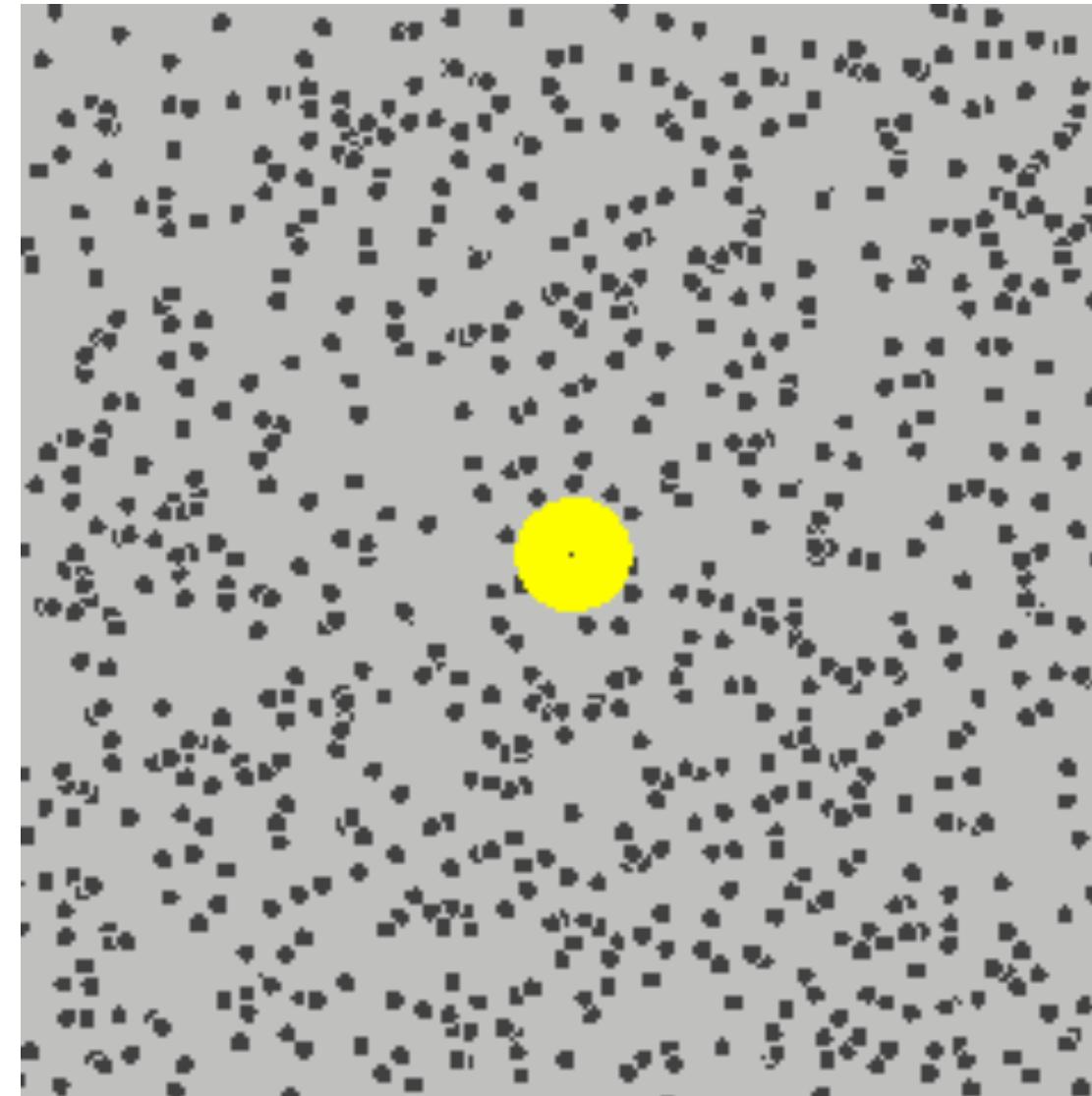
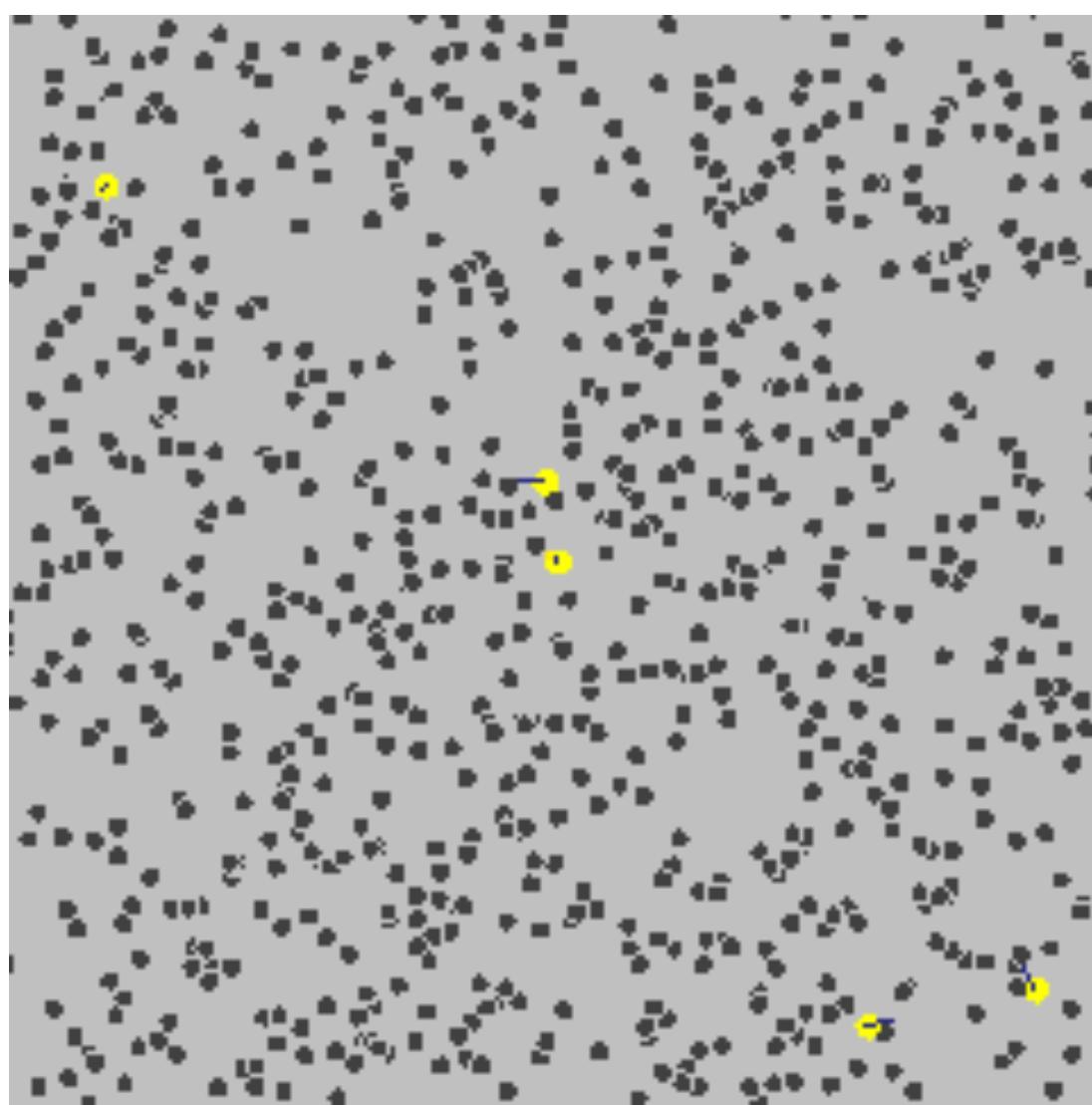
- <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brownianmotion5particles15oframe.gif#/media/File:Brownianmotion5particles15oframe.gif>
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brownian_motion_large.gif#/media/File:Brownian_motion_large.gif

Movimento Browniano



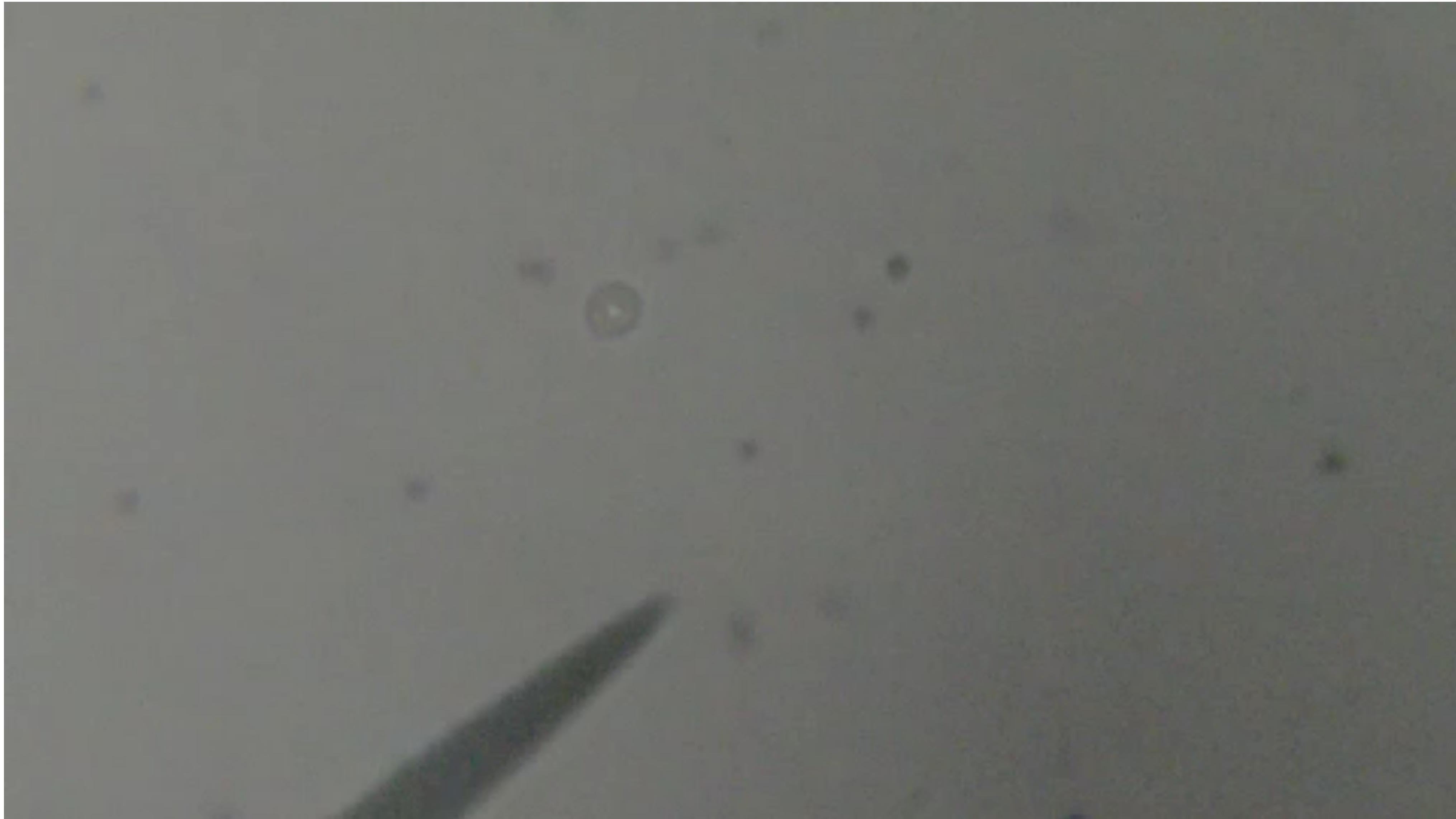
- <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brownianmotion5particles15oframe.gif#/media/File:Brownianmotion5particles15oframe.gif>
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brownian_motion_large.gif#/media/File:Brownian_motion_large.gif

Movimento Browniano



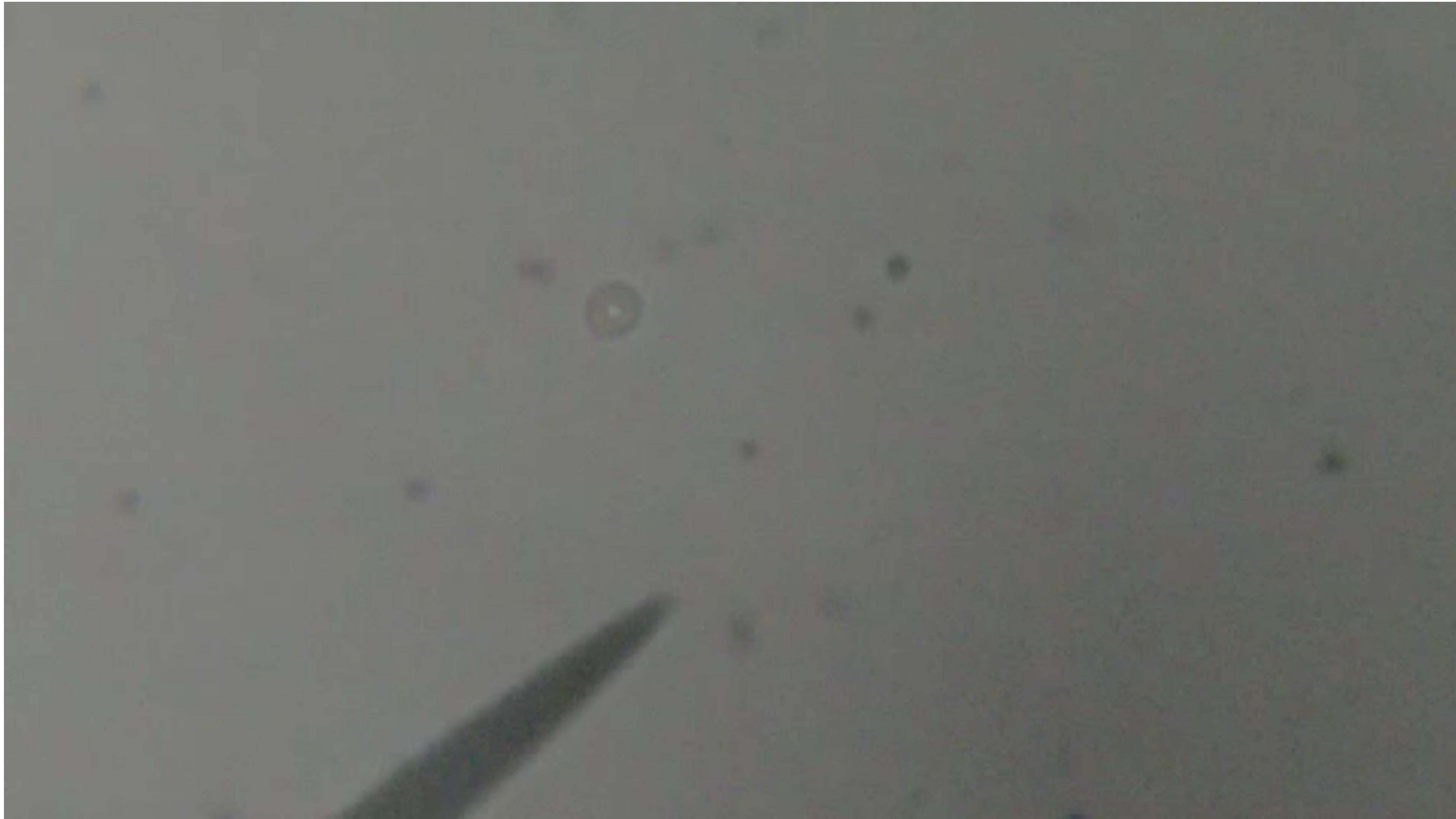
- <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brownianmotion5particles15oframe.gif#/media/File:Brownianmotion5particles15oframe.gif>
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brownian_motion_large.gif#/media/File:Brownian_motion_large.gif

Movimento Browniano



- Ver <https://www.youtube.com/watch?v=gPMVaAnii88>.

Movimento Browniano



- Ver <https://www.youtube.com/watch?v=gPMVaAnii88>.

Movimento Browniano

- Para entender a física associada, em parte é necessário saber sobre...
- **Passeio aleatório (*random walk*)**

Considere uma sequência de N passos aleatórios num espaço 3D $\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_N\}$, com $\langle \mathbf{L}_i \rangle = 0$ e $\mathbf{L}_i^2 = L^2, \forall i$. Qual a média da distância do ponto final ao ponto inicial do passeio?

Seja o vetor posição do início ao fim do passeio dado por

$$\mathbf{R}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i .$$

Note que a posição média é nula $\langle \mathbf{R}_N \rangle = 0$. Contudo, $\langle \mathbf{R}_N^2 \rangle \neq 0$. A média da distância é o mesmo que $\langle R_N^2 \rangle^{1/2} = \langle R_N \rangle$, logo precisamos calcular $\langle R_N^2 \rangle$.

Movimento Browniano

$$\mathbf{R}_N \cdot \mathbf{R}_N = (\mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}_N) \cdot (\mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}_N) = \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{R}_{N-1} + 2\mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_N \cdot \mathbf{L}_N.$$

Como $\langle \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L}_N \rangle = 0$ (*em dois slides mais há uma revisão sobre o assunto*) e usando indução, vem

$$\langle R_N^2 \rangle = \left\langle \sum_i^N L_i^2 \right\rangle = \langle NL^2 \rangle = NL^2.$$

Assim, vemos que a distância média é

$$\langle R_N \rangle = \sqrt{NL}.$$

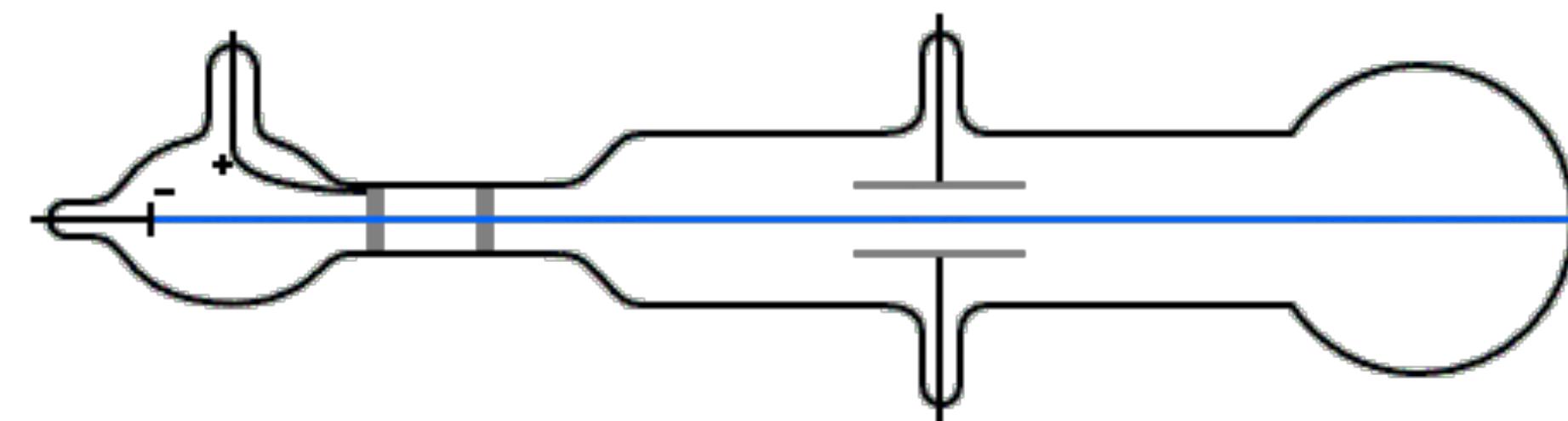
■

Movimento Browniano

- **Exercício 1:**
 - a) Refazer o exemplo anterior para o caso de passeio aleatório Gaussiano. Ou seja, considere que $\langle L_i \rangle = 0$ e $\langle L_i^2 \rangle = L^2$, consequentemente, a variância é $\sigma^2 = L^2$.
 - b) Há ainda uma outra forma de fazer este exercício ainda mais simples, ao invés de refazer o caso anterior, usar propriedades de distribuições normais (ou Gaussiana): a soma de variáveis aleatórias distribuídas normalmente é também uma variável aleatória distribuída normalmente.
- **Exercício 2:** Explicar o movimento Browniano. Uma sugestão, dentre outras possíveis: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_41.html (ver última seção desse pdf).

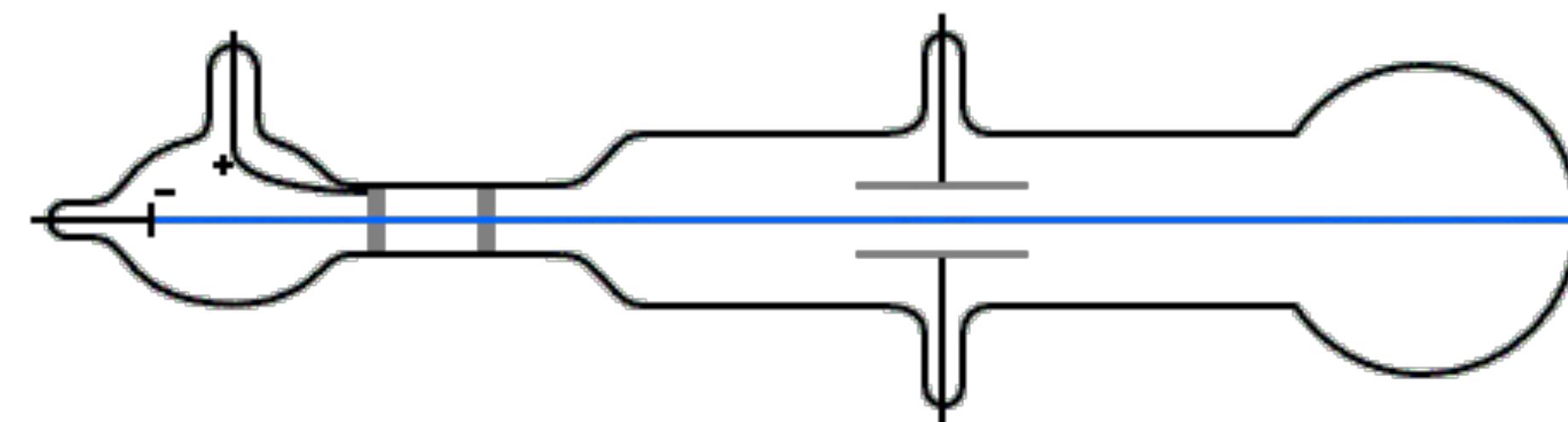
A descoberta do elétron

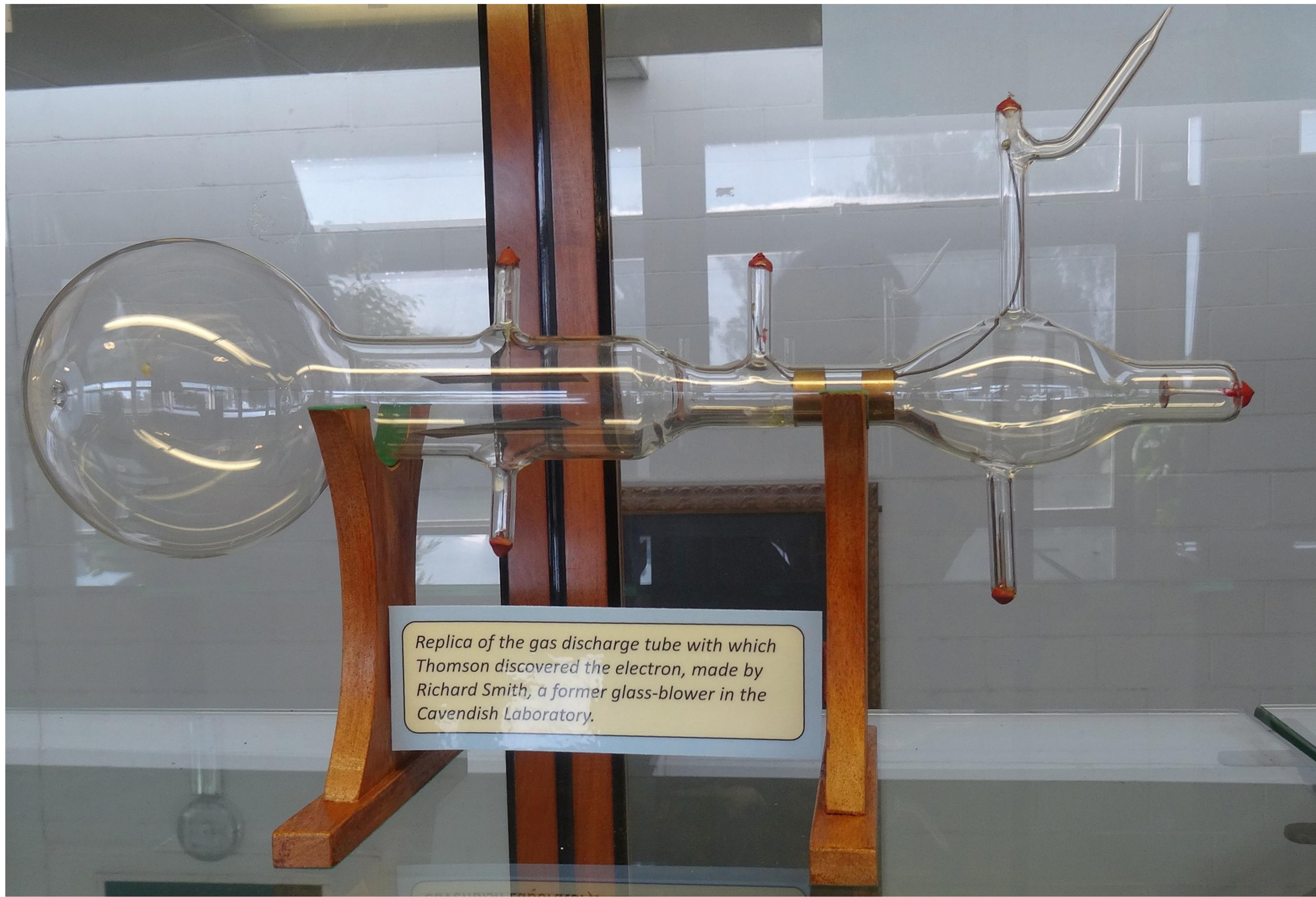
- O que entendemos hoje como física das partículas fundamentais começa com a descoberta do elétron.
- Desde sua detecção até hoje, não há indícios de que o elétron seja composto por qualquer outra coisa, e nem que ele possa ser dividido. Assim, o elétron tem semelhança com um "átomo" no sentido filosófico. Embora, ao que tudo indica, seja um "átomo" pontual, ao contrário de várias conjecturas do atomismo.
- A experiência de J.J. Thompson (1897) é ilustrada abaixo a seguir.



A descoberta do elétron

- O que entendemos hoje como física das partículas fundamentais começa com a descoberta do elétron.
- Desde sua detecção até hoje, não há indícios de que o elétron seja composto por qualquer outra coisa, e nem que ele possa ser dividido. Assim, o elétron tem semelhança com um "átomo" no sentido filosófico. Embora, ao que tudo indica, seja um "átomo" pontual, ao contrário de várias conjecturas do atomismo.
- A experiência de J.J. Thompson (1897) é ilustrada abaixo a seguir.





A descoberta do elétron

- Esta experiência sugeriu que, se a matéria seria composta por átomos eletricamente neutros, então esses conteriam elétrons como parte negativa e haveria uma parte mais massiva associada à carga positiva. Nasce o famoso "modelo do pudim" de Thompson. Que veio a ser descartado pouco depois, devido ao experimento de Rutherford de espalhamento de partículas α .
- **Exercício 3:**
 - a) Se uma partícula carregada de velocidade v não sofre deflexão ao passar através de um campo uniforme elétrico e magnético, em que E , B e v são mutualmente perpendiculares entre si, qual a velocidade de partícula?
 - b) Na ausência de campo elétrico, se a partícula se move ao longo de um arco de raio R , qual a razão da carga pela massa da partícula?

O fóton e o efeito fotoelétrico

- Outro fato chave relevante para o entendimento atual das partículas fundamentais veio da compreensão do efeito fotoelétrico. E, curiosamente, Einstein também teve participação relevante nesta descoberta.
- Embora Einstein seja mais famoso pelas teorias da relatividade especial e geral, foi o efeito fotoelétrico que concedeu a ele o Nobel, em 1921. (<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1921/summary/>)
- Classicamente, antes do advento da mecânica quântica, houve um longo debate se a luz seria uma onda ou uma partícula.
- Descartes e Newton desenvolveram a teoria corpuscular da luz, segundo a qual a luz seria composta por partículas, átomos. (https://en.wikipedia.org/wiki/Corpuscular_theory_of_light)
- Huygens, contemporâneo a Newton (séc. XVII), desenvolveu a teoria ondulatória da luz; que inicialmente não tinha tanto crédito quanto a de Newton.
- Somente com o estabelecimento de difração e interferência da luz, no século XIX, a teoria corpuscular da luz foi abandonada.

O fóton e o efeito fotoelétrico

- Curiosamente, a descoberta do efeito fotoelétrico trouxe de volta, de certa forma, a explicação corpuscular da luz, dando origem ao fóton. Contudo, esse retorno se deu num contexto bastante diferente do esboçado por Newton.
- **Exercício 4:** Vocês já viram o efeito fotoelétrico. Façam uma breve explicação de seus fundamentos e de sua detecção experimental. Sugestão: seção 3.3 do livro do Tipler.

Força forte, o potencial de Yukawa e mésons

- O que mantém os núcleo atômico, composto de partículas positivas, unido?
- É necessário uma nova força, que atue em escalas muito pequenas, capaz de manter o núcleo unido. Como vamos chamar esta nova e extraordinária força? — **Força forte**.
- Foi Yukawa em 1934 (neste artigo https://www.jstage.jst.go.jp/article/ppmsj1919/17/0/17_0_48/_pdf/-char/en) que introduziu uma expressão quantitativa para essa força que serviu de paradigma para os desenvolvimentos futuros. O argumento usado foi, de certa forma, muito simples. Visava a forma mais simples de implementar essa força forte.
- O potencial dessa força tem de decair mais rapidamente que $1/r$. Para este caso, o potencial satisfaz, no vácuo, a eq. de Laplace

$$\nabla^2 U = 0.$$

- Precisa-se introduzir uma escala de distância para o decaimento ser mais rápido. Levando à equação de Helmholtz (note que λ tem dimensão de inverso de comprimento)

$$(\nabla^2 - \lambda^2)U = 0.$$

Força forte, o potencial de Yukawa e mésons

- A solução dessa última equação pode ser encontrada de diversas formas. No curso de MQ vocês encontram essa equação em outro contexto e precisarão resolvê-la sem assumir simetria esférica (o que leva a harmônicos esféricos e funções de Bessel esféricas).
- **Exercício 5:** Assumindo simetria esférica, mostre que a solução da equação de Helmholtz é

$$U = \frac{1}{r} (U_1 e^{-\lambda r} + U_2 e^{\lambda r}).$$

Dica: Note que $\nabla^2[Z(r)/r]$ tem uma expressão bem mais simples que $\nabla^2 U(r)$. ■

- Um potencial com a forma

$$U = U_0 \frac{1}{r} e^{-r\lambda},$$

com $\lambda > 0$, é chamado de **potencial de Yukawa**. Isto é, trata-se de um potencial coulombiano multiplicado por um decaimento exponencial. É este o potencial relevante para a força forte entre prótons e nêutrons.

Força forte, o potencial de Yukawa e mésons

Now the eqnatiion

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} U = 0 \quad (1)$$

has only static solution with central symmetry $\frac{1}{r}$, except the additive and the multiplicative constants. The potential of force between the neutron and the proton should, however, not be of Coulomb type, but decrease more rapidly with distance. It can be expressed, for example, by

$$+ \text{ or } -g^2 \frac{e^{-\lambda r}}{r}, \quad (2)$$

where g is a constant with the dimension of electric charge, i. e., $\text{cm.}^{\frac{3}{2}}$ $\text{sec.}^{-1} \text{ gr.}^{\frac{1}{2}}$ and λ with the dimention cm.^{-1}

Since this function is a static solution with central symmetry of the wave equation

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \lambda^2 \right\} U = 0, \quad (3)$$

let this equation be assumed to be the correct equation for U in vacuum. In the presence of the heavy particles, the U -field interacts with them and causes the transition from neutron state to proton state.

Trecho do artigo de Yukawa de 1934

https://www.jstage.jst.go.jp/article/ppmsj1919/17/0/17_0_48/_pdf/-char/en

Yukawa ganhou o prêmio Nobel
em 1949

<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1949/yukawa/facts/>

Força forte, o potencial de Yukawa e mésons

- A introdução dessa nova força leva à necessidade de uma nova partícula.
- Tal como a força eletromagnética está associada a fótons. O próprio Yukawa, nesse mesmo artigo, desenvolveu um princípio de quantização do campo semelhante ao que foi feito para o eletromagnetismo.

§ 3. Nature of the quanta accompanying the field

The U -field above considered should be quantized according to the general method of the quantum theory. Since the neutron and the proton both obey Fermi's statistics, the quanta accompanying the U -field should obey Bose's statistics and the quantization can be carried out on the line similar to that of the electromagnetic field.

- Assim, λ deveria estar associado a uma propriedade da nova partícula. Yukawa associa a massa da partícula a λ (coisa muito bem estabelecida atualmente, devido à relação entre massa e função de Green, mas na época acho que isso ainda não estava tão claro).

$$m_U = \frac{\lambda h}{c}, \text{ levando a uma massa } \sim 150 \text{ MeV} (\sim 0,5 \text{ MeV é a do elétron, } \sim 1 \text{ GeV a do próton})$$

Léptons, mésons e bárions: nomenclatura histórica

- Ao associar uma partícula à força nuclear forte, cuja massa seria da ordem de ~150 MeV, deu-se origem à classificação de partículas como léptons, mesóns e bárions.
- Originalmente, na década de 40, o significado desses termos estava diretamente associado às suas massas como segue:
 - Lépton: do grego, pequeno, fino. Se referiria às partículas de menor massa, como o elétron (~0,5 MeV).
 - Méson: do grego, intermediário. Partículas com massa da ordem inferida por Yukawa (antes desconhecidas), em torno de 150 MeV.
 - Bárion: do grego, pesado. Seriam as partículas mais pesadas, como prótons e nêutrons (~ 1 GeV).
- A classificação acima, baseada nos valores das massas, não é mais usada, mas os termos léptons, mésons e bárions seguem sendo usados em outro contexto, como veremos...

Léptons, mésons e bárions: nomenclatura atual

- Ainda vamos falar dos quarks, mas podemos já adiantar as seguintes definições:
 - Léptons: partículas fundamentais de spin $1/2$ que não interagem via força forte.
 - Mésons: partículas compostas por quarks cujo número bariônico é zero. Normalmente compostas por um quark e um anti-quark.
 - Bárions: partículas cujo número bariônico é 1 . Essencialmente são compostas de 3 quarks. O pentaquark (4 quarks e 1 antiquark) é um bárion exótico, observado pela primeira vez em 2015 (<https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.115.072001> , <https://home.cern/news/news/physics/lhcb-experiment-discovers-new-pentaquark>).
- O número bariônico é definido por

$$B = \frac{1}{3}(\text{número de quarks} - \text{número de antiquarks}).$$

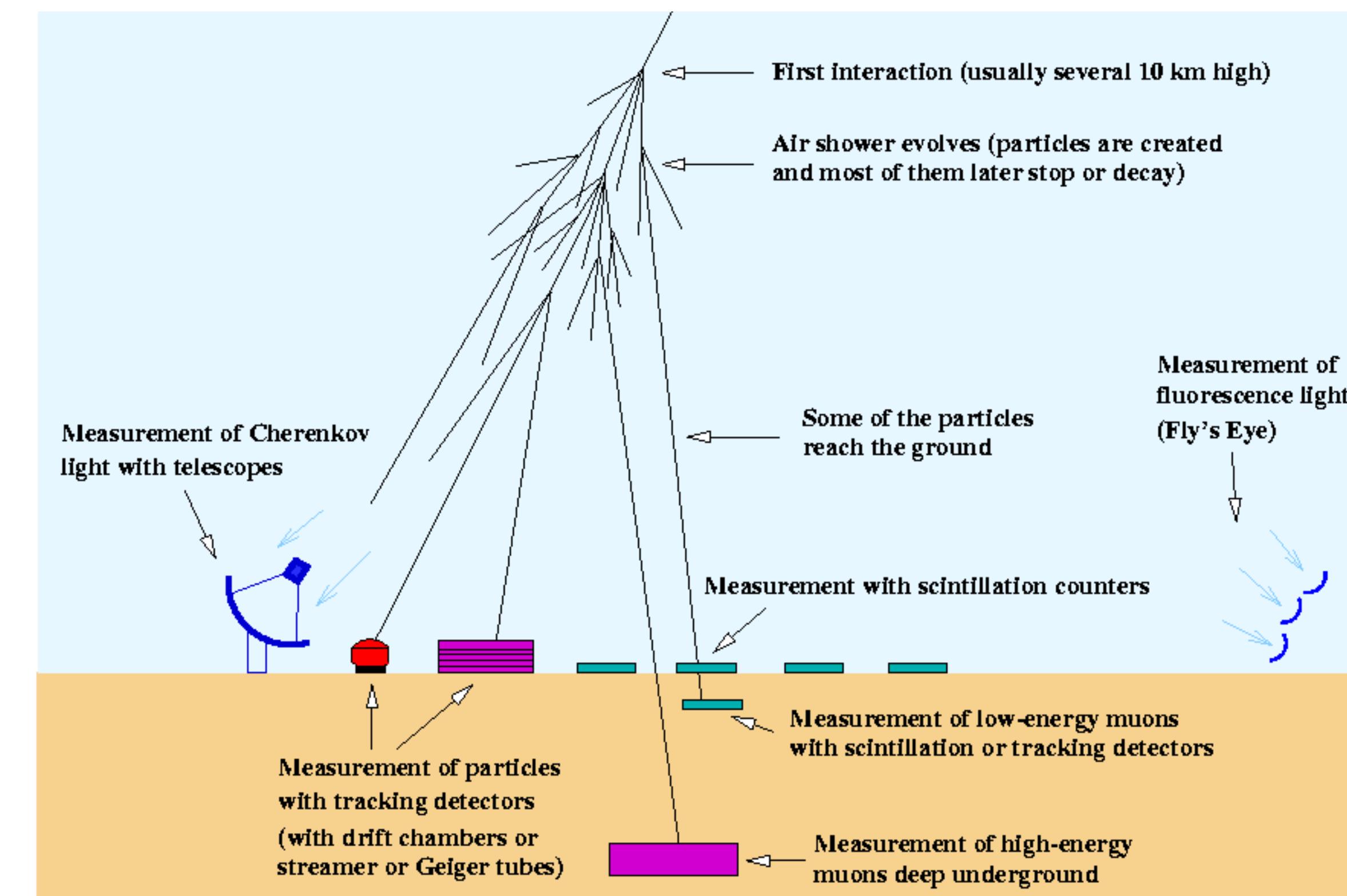
Prótons e nêutrons são compostos por 3 quarks, logo têm $B = 1$. O píon é composto de um quark e um antiquark, logo tem $B = 0$. Elétrons não são compostos por quarks, logo $B = 0$.

A detecção do méson de Yukawa

- Feita a predição de um méson associado a força forte, por Yukawa, falta detectá-la.
- Na época, não se usava ainda aceleradores de partículas (nada semelhantemente ao LHC era usado ainda).
- Havia duas fontes de partículas de alta energia: material radioativo, que poderia gerar radiação α ou β , ou raios cósmicos.
- Os últimos fazem uso de partículas aceleradas por meios externos à Terra, muitas vezes externos ao sistema solar, e podendo até ser externo à Via Lactea, como hoje sabemos.
- Raios cósmicos, quer você goste ou não deles, têm influência direta em equipamento eletrônicos que usamos. Erros de computação às vezes se devem a eles (por exemplo, <https://www.nature.com/articles/news980730-7>).

A detecção do méson de Yukawa: o píon

- A partir de raios cósmicos e após a previsão de Yukawa, duas partículas novas foram encontradas com massas ~ 100 MeV.
- E isso causou confusão na época. Com o tempo ficou claro que uma delas era a partícula predita por Yukawa e a outra era uma partícula nova que ninguém havia solicitado...
- A partícula não solicitada é o múon (μ), que embora tenha massa de ~ 100 MeV hoje é classificada como lépton (é semelhante a um elétron, mas 200 vezes mais massivo).
- A partícula descrita por Yukawa seria o píon (π) (ou méson pi). Esse sim, como hoje entendemos, é um méson (composto por quark e anti-quark).
- A detecção do píon foi feita em 1947, e levou Cecil Powell a receber o prêmio Nobel de 1950.
<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1950/summary/>



(C) 1999 K. Bernlöhr

A detecção do méson de Yukawa: o píon

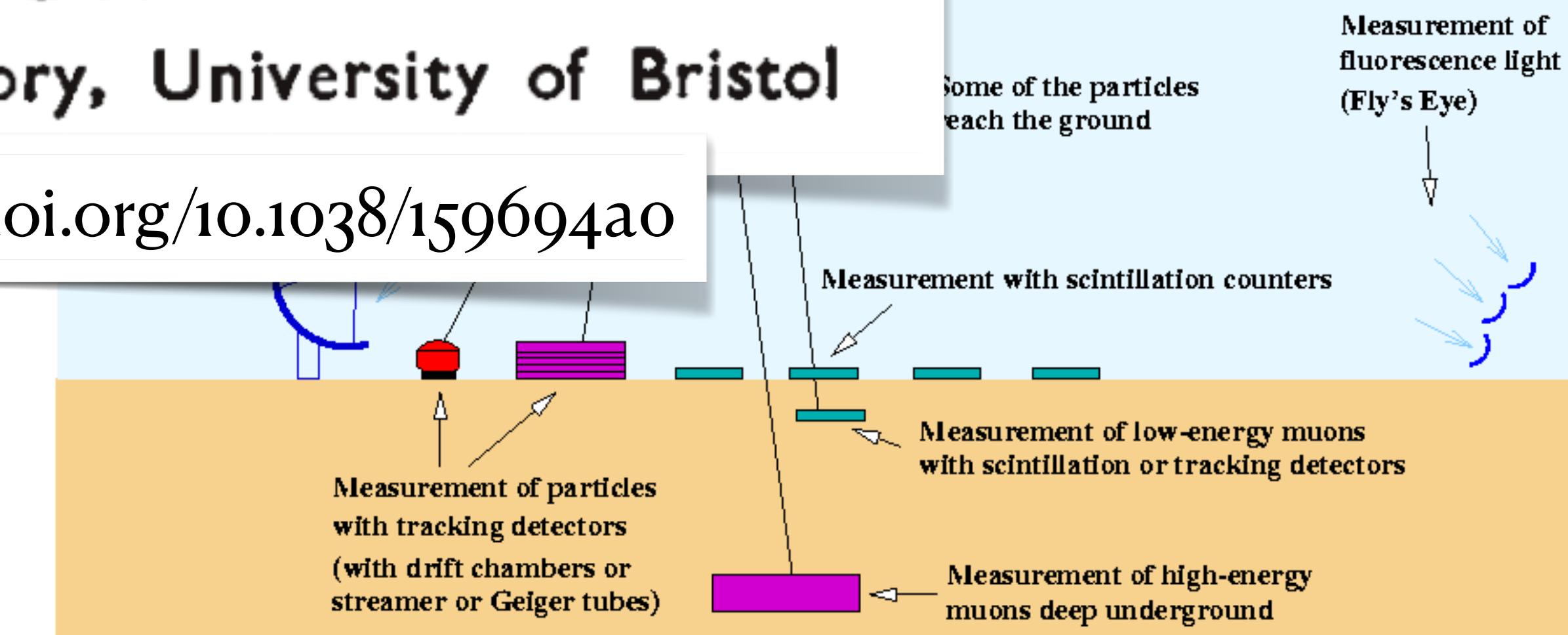
- A partir de raios cósmicos e após a previsão de Yukawa, duas partículas novas foram encontradas com massas ~ 100 MeV.
- E isso causou a descoberta da partícula predita por Yukawa.
- A partícula não é tão leve quanto o elétron, embora tenha massa menor que a de cada como lépton. Ela é cerca de 200 vezes mais pesada que o elétron.
- A partícula descoberta era o píon (ou méson pi). Essa descoberta de Lattes et al, Nature 1947 <https://doi.org/10.1038/159694ao> é um méson (composto por quark e anti-quark).
- A detecção do píon foi feita em 1947, e levou Cecil Powell a receber o prêmio Nobel de 1950. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1950/summary/>

PROCESSES INVOLVING CHARGED MESONS

By DR. C. M. G. LATTES, H. MUIRHEAD,
DR. G. P. S. OCCHIALINI and
DR. C. F. POWELL

H. H. Wills Physical Laboratory, University of Bristol

Lattes et al, Nature 1947 <https://doi.org/10.1038/159694ao>



A partícula que ninguém solicitou...

- Ninguém previu o múon...
- Veremos que há no modelo padrão de partículas casos em que as partículas têm de existir para a coerência da teoria e há casos em que as partículas simplesmente existem, não havendo em princípio uma necessidade prévia para sua existência.
- Há também "previsões aproximadas". Esse por sinal é o caso do píon, que na verdade são 3 (π^+ , π^- , π^0). O méson de Yukawa era uma partícula introduzida para explicar a interação forte entre prótons e nêutrons, mas as interações fortes como hoje entendemos são na verdade mais complexas... Os píons são relevantes para a força nuclear, ou força forte residual. Os principais agentes da força forte (como hoje entendemos) são os glúons.
- Curiosamente, há aplicações tecnológicas atuais que usam diretamente os múons, ver por exemplo <https://www.nature.com/articles/d41586-018-05254-2>
- Os experimentais natos aqui podem tentar fazer seus próprios detectores de múons: <https://physicstoday.scitation.org/do/10.1063/PT.6.1.20170614a/full/>

Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- Para uma partícula livre de massa m , a eq. de Schrödinger nos diz que

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = 0.$$

- Nota-se que a equação acima equivale a $E = p^2/(2m)$, com

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \text{ e } E \rightarrow i\hbar \partial_t.$$

- A relação relativística entre E e \mathbf{p} , usando a assinatura $(+ - - -)$ é dada por

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2, \text{ em que } (p^\mu) = (E/c \quad p^1 \quad p^2 \quad p^3).$$

$$\frac{E^2}{c^2} - \sum_i p^i p^i = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar} \right) \Phi = 0.$$

Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- Para uma partícula livre de massa m , a eq. de Schrödinger nos diz que

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = 0.$$

- Nota-se que a equação acima equivale a $E = p^2/(2m)$, com

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \text{ e } E \rightarrow i\hbar \partial_t.$$

- A relação relativística entre E e \mathbf{p} , usando a assinatura $(+ - - -)$ é dada por

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2, \text{ em que } (p^\mu) = (E/c \quad p^1 \quad p^2 \quad p^3).$$

$$\frac{E^2}{c^2} - \sum_i p^i p^i = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar} \right) \Phi = 0.$$

Lembrar que

$$p^i p_i = \sum_{i=1}^3 p^i p_i = - \sum_{i=1}^3 p^i p^i$$

Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- Para uma partícula livre de massa m , a eq. de Schrödinger nos diz que

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = 0.$$

- Nota-se que a equação acima equivale a $E = p^2/(2m)$, com

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \text{ e } E \rightarrow i\hbar \partial_t.$$

- A relação relativística entre E e \mathbf{p} , usando a assinatura $(+ - - -)$ é dada por

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2, \text{ em que } (p^\mu) = (E/c \quad p^1 \quad p^2 \quad p^3).$$

Não uso Ψ aqui
pois a interpretação
é diferente.

$$\frac{E^2}{c^2} - \sum_i p^i p^i = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar} \right) \Phi = 0.$$

Lembrar que

$$p^i p_i = \sum_{i=1}^3 p^i p_i = - \sum_{i=1}^3 p^i p^i$$

Equação de Klein-Gordon
Publicada em 1926 em dois artigos independentes

Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- A eq. de Klein-Gordon tem o mérito de ser relativística, mas têm dois problemas para usá-la para partículas, como o elétron.
- O mais evidente é que não há nada nessa equação sobre spin. Ela no máximo se aplicaria a partículas de spin nulo.
- O problema mais grave é como interpretar as soluções dessa equação. A equação de Schroedinger conserva a probabilidade. Em particular, há uma equação de continuidade associada à densidade de probabilidade da posição da partícula:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \text{ com } \rho = |\Psi|^2 \text{ e } \mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m}(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi).$$

- A eq. de Klein-Gordon não satisfaz essa conservação de probabilidade.

Exercício 6: i) Verifique que a eq. de Schroedinger leva à eq. da continuidade para a densidade de probabilidade. ii) Mostre que $|\Phi|^2$, em que Φ satisfaz a eq. de Klein-Gordon, não satisfaz uma equação da continuidade.

Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- Buscando resolver esses problemas, [Dirac desenvolveu nova equação relativística](#). Contudo, a forma dela é um tanto mais complicada que a de Klein-Gordon ou Schroedinger.

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0,$$

Acima, cada γ^μ é uma matriz 4×4 , logo há uma identidade 4×4 implícita junto de mc e ψ é um vetor complexo de 4 componentes. É eq. diferencial de *primeira ordem no tempo e no espaço*.

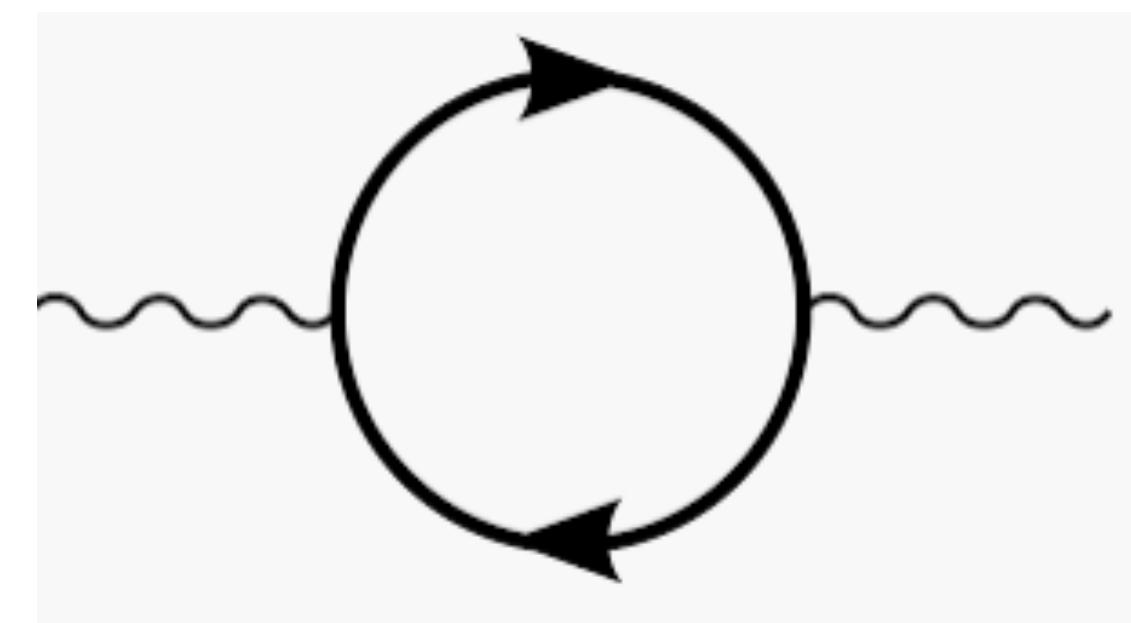
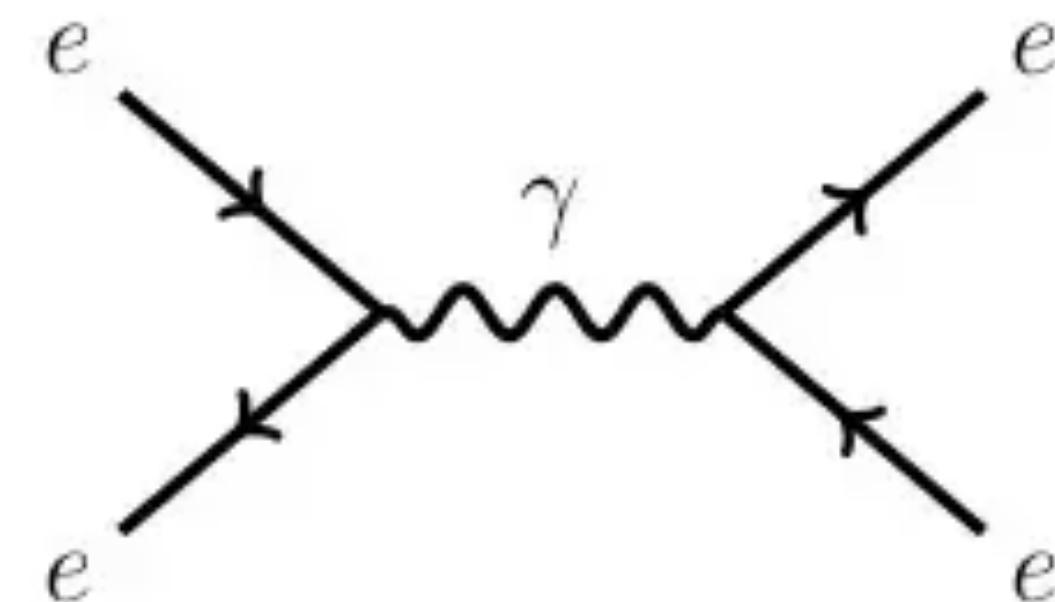
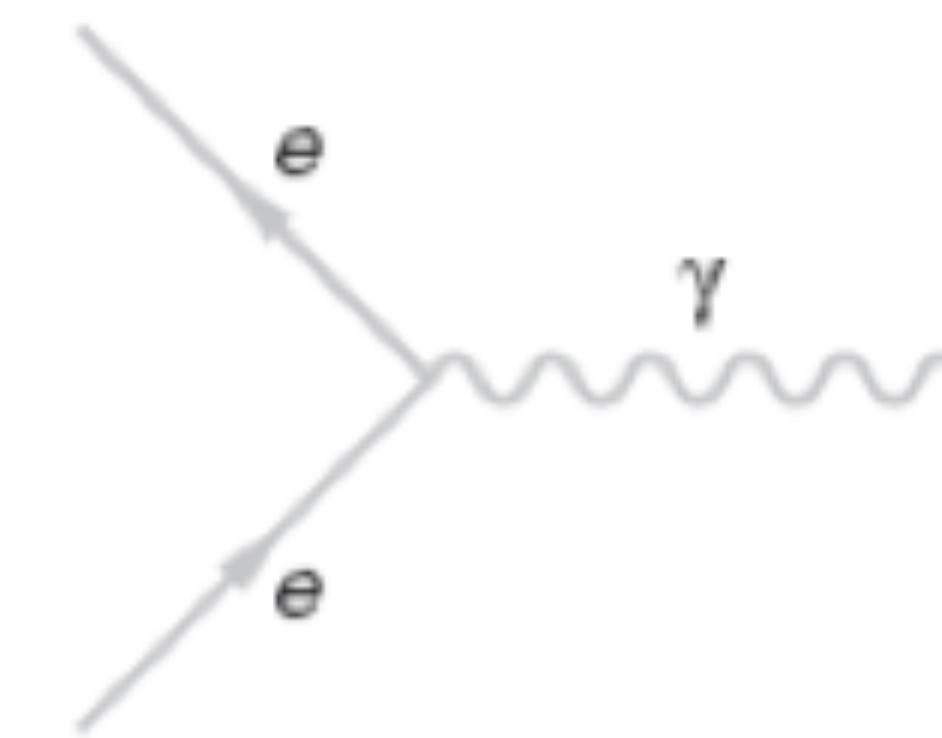
- Lidar em detalhes com esta equação está longe de nossos objetivos, só escrevo ela acima para terem ciência da forma e do que ela depende.
- Essa abordagem com matrizes possibilitou a inclusão de spin, mas ainda não resolveu de imediato o problema da conservação de probabilidade.
- Paralelamente, um outro problema notado por Dirac foi a possibilidade de estados de energia negativa. Isto está associado à equação relativística de energia ser quadrática, admitindo ambos os sinais.
- Dirac desenvolveu uma interpretação que hoje é chamada de “mar de Dirac”. Comentar.

Klein-Gordon, a eq. de Dirac e antipartículas

- Dirac ganhou o prêmio Nobel em 1933 (<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1933/summary/>). Curiosamente, ganhou esse prêmio junto de Schroedinger.
- A eq. de Dirac é fundamental para a física de partículas, descreve corretamente partículas de spin 1/2 relativísticas.
- A interpretação do “mar de Dirac” (por sinal, desde o início criticada por Pauli) não faz sentido como teoria fundamental. Curiosamente, de forma efetiva, há sistemas de matéria condensada que funcionam como mar de Dirac. – Há vários outros exemplos de teorias que sugeriram no contexto de física fundamental, mas encontram aplicação em matéria condensada.
- Embora não correta de forma geral, ela indicou um caminho essencial para o progresso da TQC: antipartículas precisam ser consideradas para a teoria fazer sentido. Equivalentemente, TQC exige que partículas possam ser criadas e destruídas.
- E foi a partir do mar de Dirac que veio a previsão da existência do pósitron, que levou ao prêmio Nobel de Anderson, em 1936. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1936/anderson/facts/>

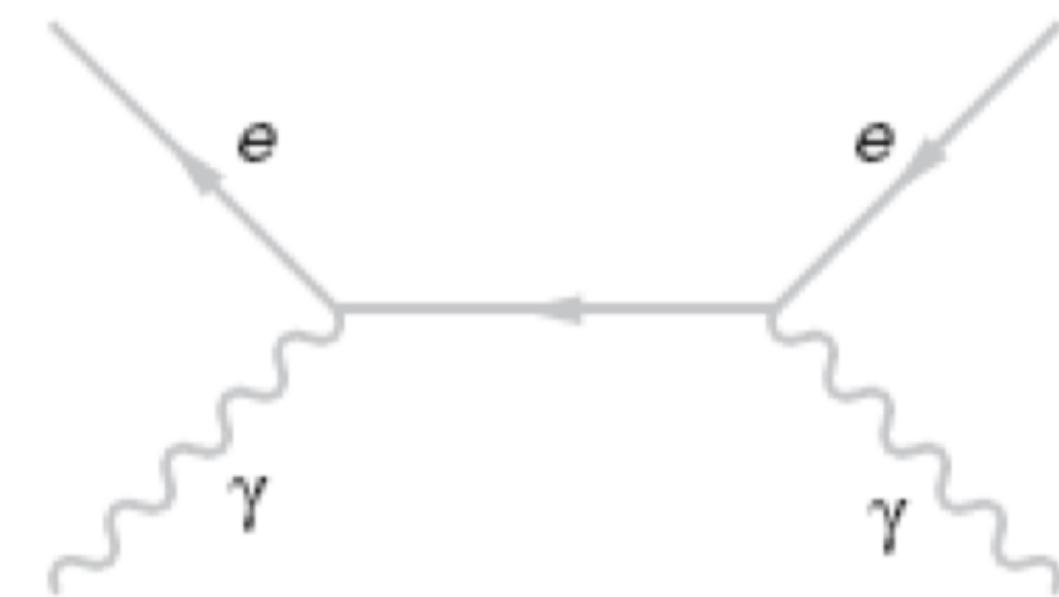
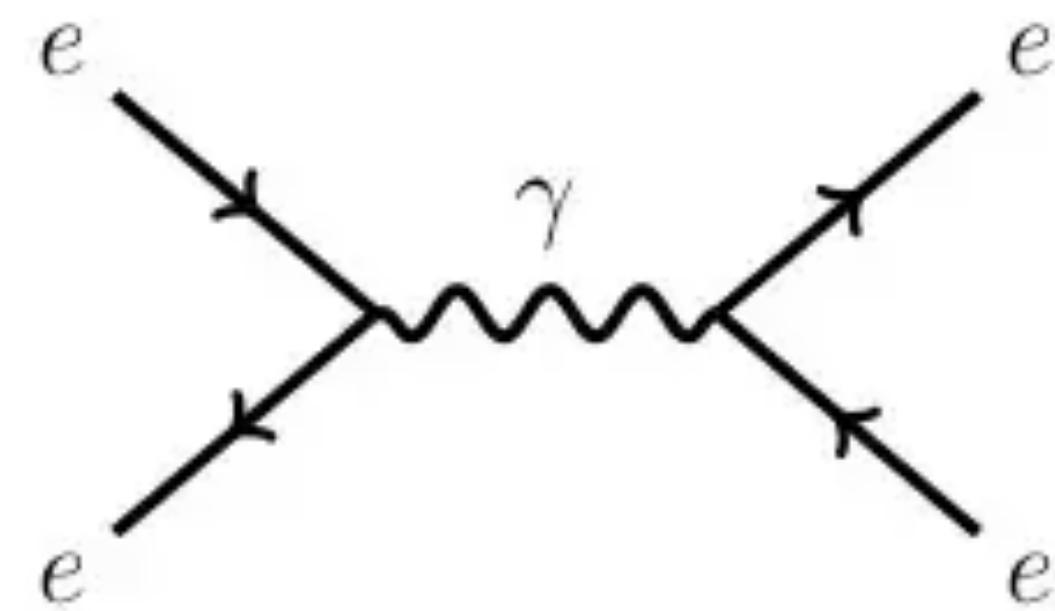
Diagrams de Feynman

- Depois que a eq. de Dirac foi entendida e adequadamente aplicada para tratar de elétrons, os fundamentos de TQC avançaram significativamente.
- Os cálculos foram ficando mais complicados. Em especial, pois era impossível evitar anti-partículas que poderiam ser criadas e destruídas a qualquer momento. E esse fenômeno, mesmo quando não observado diretamente, altera as probabilidades dos resultados experimentais, logo precisa ser calculado.
- Feynman desenvolveu um método bem particular de fazer essas contas, por meio de gráficos e propriedades deles. Converter os gráficos em expressões matemáticas precisas é matéria de TQC, não veremos aqui, mas é possível ter uma noção qualitativa do que eles dizem.



Diagrams de Feynman

- Nos diagramas de Feynman, as partículas detectadas correspondem às que estão nos extremos do diagrama, as do meio refletem processos que ocorreram (ou que são possíveis) e são chamadas de partículas virtuais.
- **Exercício 7:** a) Apresente interpretações para os dois diagramas abaixo. Em cada caso, considere que: i) o tempo flui da esquerda para a direita; ii) que flui de baixo para cima.



- b) Desenhe dois outros diagramas que envolvam mais partículas virtuais, mas que o resultado final seja o mesmo. Esses diagramas têm um ou mais “loops”, o que faz com que eles contribuam com uma probabilidade menor.

Neutrinos

- Foram inicialmente inferidos indiretamente a partir de observações de decaimento β . Sabia-se que o decaimento β emitiria um elétron e converteria um nêutron num próton.
- Se esse fosse o único efeito desse decaimento, a energia cinética do elétron deveria ser sempre a mesma (ver o próximo exercício). Contudo, experimentos mostravam que essa energia mudava, o que levou Pauli a considerar uma nova partícula, que veio a ser batizada de **neutrino** (o nome se deve a Fermi, por isso o diminutivo em italiano). Outra opção, que para a época fazia sentido, era violar a conservação de energia. A hipótese do neutrino se demonstrou correta.
- Algumas partículas sem carga, como o fóton e o π^0 , são elas mesmas as suas antipartículas, mas havia dúvida, com razão, se o mesmo se aplicaria ao neutrino. Atualmente entendemos que o seguinte processo é possível (via decaimento β):

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu},$$

em que $\bar{\nu}$ é o antineutrino. Qual a diferença de ν para $\bar{\nu}$?

Neutrinos

- Exercício 8 (do Griffiths de partículas):

3.19 Particle A , at rest, decays into particles B and C ($A \rightarrow B + C$).

(a) Find the energy of the outgoing particles, in terms of the various masses.

$$\left[\text{Answer: } E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} c^2 \right]$$

(b) Find the magnitudes of the outgoing momenta.

$$\left[\text{Answer: } |\mathbf{p}_B| = |\mathbf{p}_C| = \frac{\sqrt{\lambda(m_A^2, m_B^2, m_C^2)}}{2m_A}, \right]$$

where λ is the so-called *triangle function* :

$$\left[\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz. \right]$$

Uma curiosidade histórica

† It is interesting to note that Bohr was an outspoken critic of Einstein's light quantum (prior to 1924), that he mercilessly denounced Schrödinger's equation, discouraged Dirac's work on the relativistic

electron theory (telling him, incorrectly, that Klein and Gordon had already succeeded), opposed Pauli's introduction of the neutrino, ridiculed Yukawa's theory of the meson, and disparaged Feynman's approach to quantum electrodynamics. Great scientists do not always have good judgment – especially when it concerns other people's work – but Bohr must hold the all-time record.

Do Griffiths

Conservação de números bariônico e leptônico

- No decaimento $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$, note que o número bariônico é conservado.
- Falamos antes desse número, e agora vamos citar uma lei geral que faz parte do modelo padrão atual de partículas: **o número bariônico é conservado.** => Estabilidade do próton.
- A lei acima implica em particular que qualquer processo que envolva elétrons, fótons e neutrinos somente, não pode ter como resultado um próton, um nêutron ou uma combinação deles (a menos que haja antíprótons ou antinêutrons envolvidos). Outro decaimento que é impossível é o seguinte: $n \not\rightarrow e^- + e^+$. Note que ele preserva carga e em princípio pode preservar energia e momento, mas viola conservação do número bariônico.
- Assim como há uma lei de conservação do número bariônico há também uma para léptons que também é parte do modelo padrão: **o número leptônico é conservado.**
- Assim, $n \not\rightarrow p^+ + e^- + \nu$. O antineutrino é essencial.
- A detecção do neutrino se deu pela primeira vez nos anos 50, através do inverso do decaimento β : $\bar{\nu} + p^+ \rightarrow n + e^+$. Detalhes aqui: <https://library.lanl.gov/cgi-bin/getfile?00326606.pdf>

Números leptônicos

Lepton	Conserved Quantity	Lepton Number	Anti-Lepton	Conserved Quantity	Lepton Number
e^-	L_e	+1	e^+	L_e	-1
ν_e		+1	$\bar{\nu}_e$		-1
μ^-	L_μ	+1	μ^+	L_μ	-1
ν_μ		+1	$\bar{\nu}_\mu$		-1
τ^-	L_τ	+1	τ^+	L_τ	-1
ν_τ		+1	$\bar{\nu}_\tau$		-1

<https://slidetodoc.com/particle-physics-true-or-false-the-fundamental-particles/>

- A tabela acima tem partículas que não vimos. O neutrino do decaimento β é o antineutrino do elétron $\bar{\nu}_e$. O múon tem também seu próprio neutrino. E há ainda outro lépton, o tau.
- Além do número leptônico, há os números mais específicos das famílias leptônicas (L_e, L_μ, L_τ). Esses são em geral conservados, exceção para o caso de oscilações de neutrinos.

Experimento de Reines-Cowan: detecção de $\bar{\nu}$

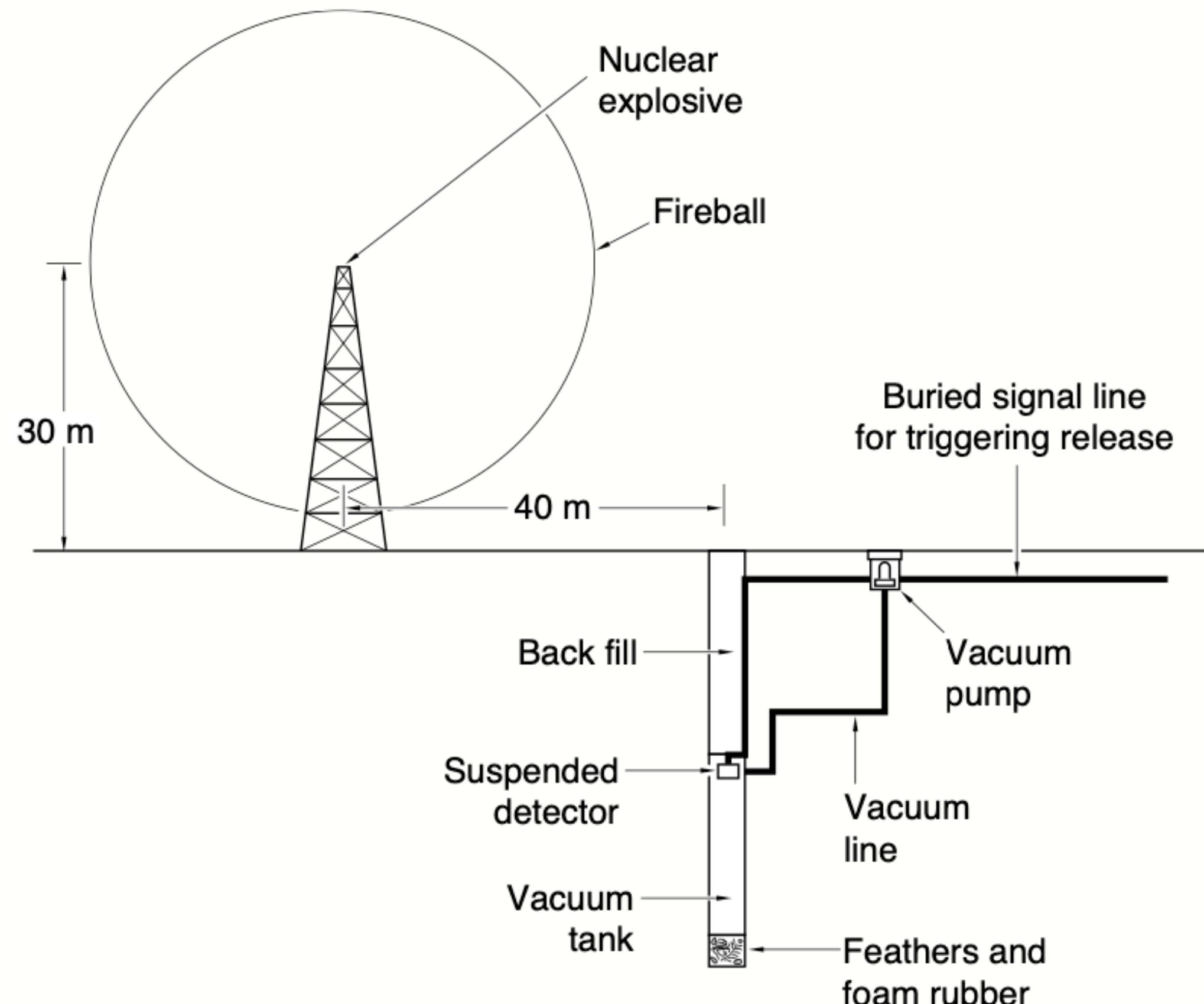


Figure 1. Detecting Neutrinos from a Nuclear Explosion

Antineutrinos from the fireball of a nuclear device would impinge on a liquid scintillation detector suspended in the hole dug below ground at a distance of about 40 meters from the 30-meter-high tower. In the original scheme of Reines and Cowan, the antineutrinos would induce inverse beta decay, and the detector would record the positrons produced in that process. This figure was redrawn courtesy of Smithsonian Institution.

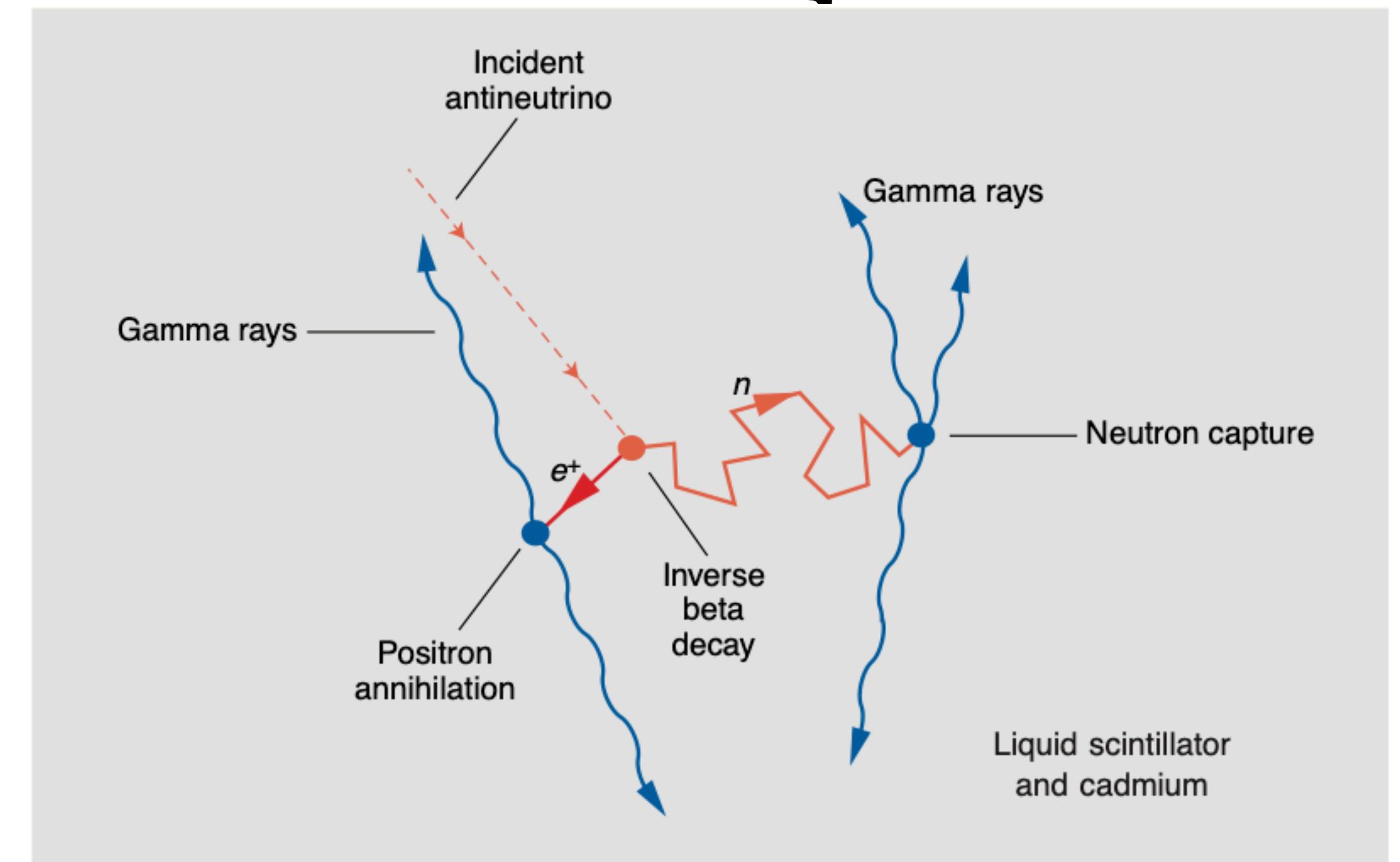


Figure 3. The Double Signature of Inverse Beta Decay

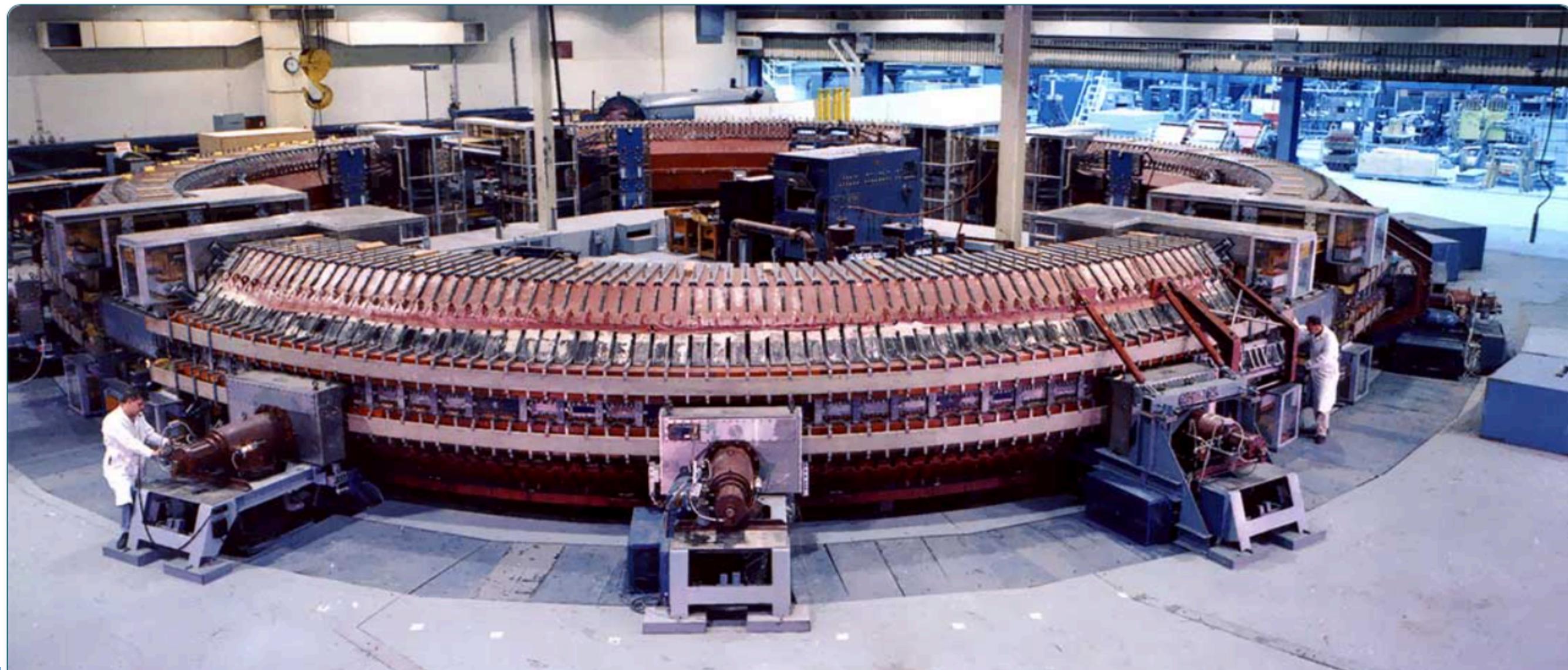
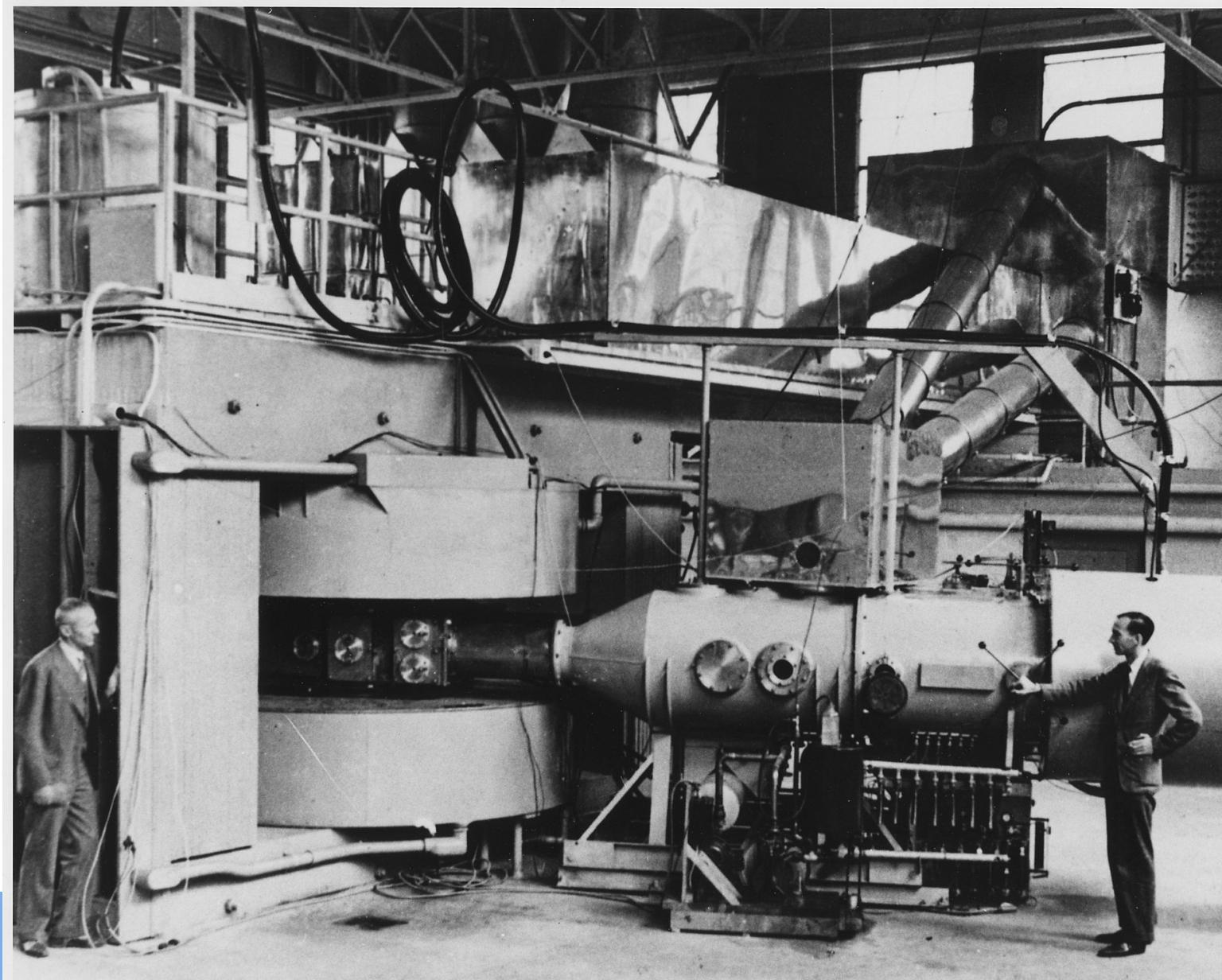
The new idea for detecting the neutrino was to detect both products of inverse beta decay, a reaction in which an incident antineutrino (red dashed line) interacts with a proton through the weak force. The antineutrino turns into a positron (e^+), and the proton turns into a neutron (n). In the figure above, this reaction is shown to take place in a liquid scintillator. The short, solid red arrow indicates that, shortly after it has been created, the positron encounters an electron, and the particle and antiparticle annihilate each other. Because energy has to be conserved, two gamma rays are emitted that travel in opposite directions and will cause the liquid scintillator to produce a flash of visible light. In the meantime, the neutron wanders about following a random path (longer, solid red arrow) until it is captured by a cadmium nucleus. The resulting nucleus releases about 9 MeV of energy in gamma rays that will again cause the liquid to produce a tiny flash of visible light. This sequence of two flashes of light separated by a few microseconds is the double signature of inverse beta decay and confirms the presence of a neutrino.

A força fraca

- O experimento anterior verificou a teoria de decaimento β de Fermi. Cabe comentar que Pauli levantou a necessidade do neutrino, e a teoria foi em seguida desenvolvida por Fermi. Sem a teoria de Fermi, o experimento nem teria sido feito, não haveria motivo para fazê-lo.
- Esse experimento só faz sentido se for possível um (anti)neutrino interagir com um próton.
- Mas neutrinos não tem carga elétrica e eles não tem absolutamente nenhuma relação com a estabilidade do núcleo atômico, logo também não experimentam força forte.
- Era necessário haver uma nova força, e assim surgiu a **força fraca**.
- Vale enfatizar que partículas fundamentais não colidem mecanicamente, interações mecânicas não existem nesse contexto.

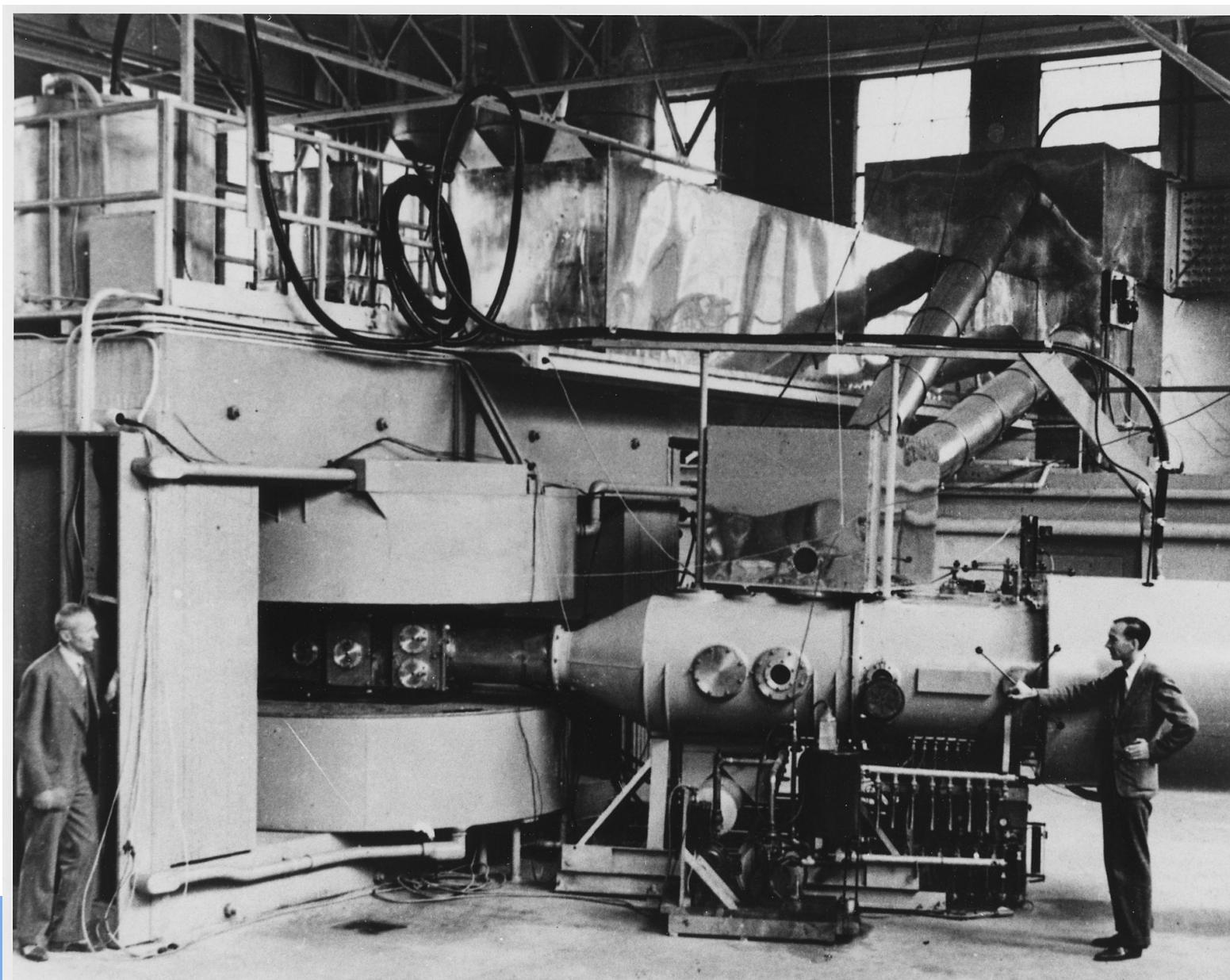
Aceleradores de partículas

- A partir da década de 50, novas partículas começaram a ser descobertas usando aceleradores. O primeiro dessa classe foi o Cosmotron, que acelerava prótons e atingia energias de até 3.3 GeV. Detalhes aqui: <https://www.bnl.gov/about/history/accelerators.php>
- A história dos aceleradores de partículas começa com Ernest Lawrence na década de 30, que desenvolveu o ciclotron, que é precursor do sincrotron (esta última tecnologia usada no Sirius e no LHC). O ciclotron atingia energias da ordem de 1 MeV, sendo capaz de gerar novos elementos químicos, mas longe das energias necessárias para competir com raios cósmicos.
- Sobre Ernest Lawrence (Nobel de 1939), há uma boa biografia dele e de seu trabalho [aqui](#).

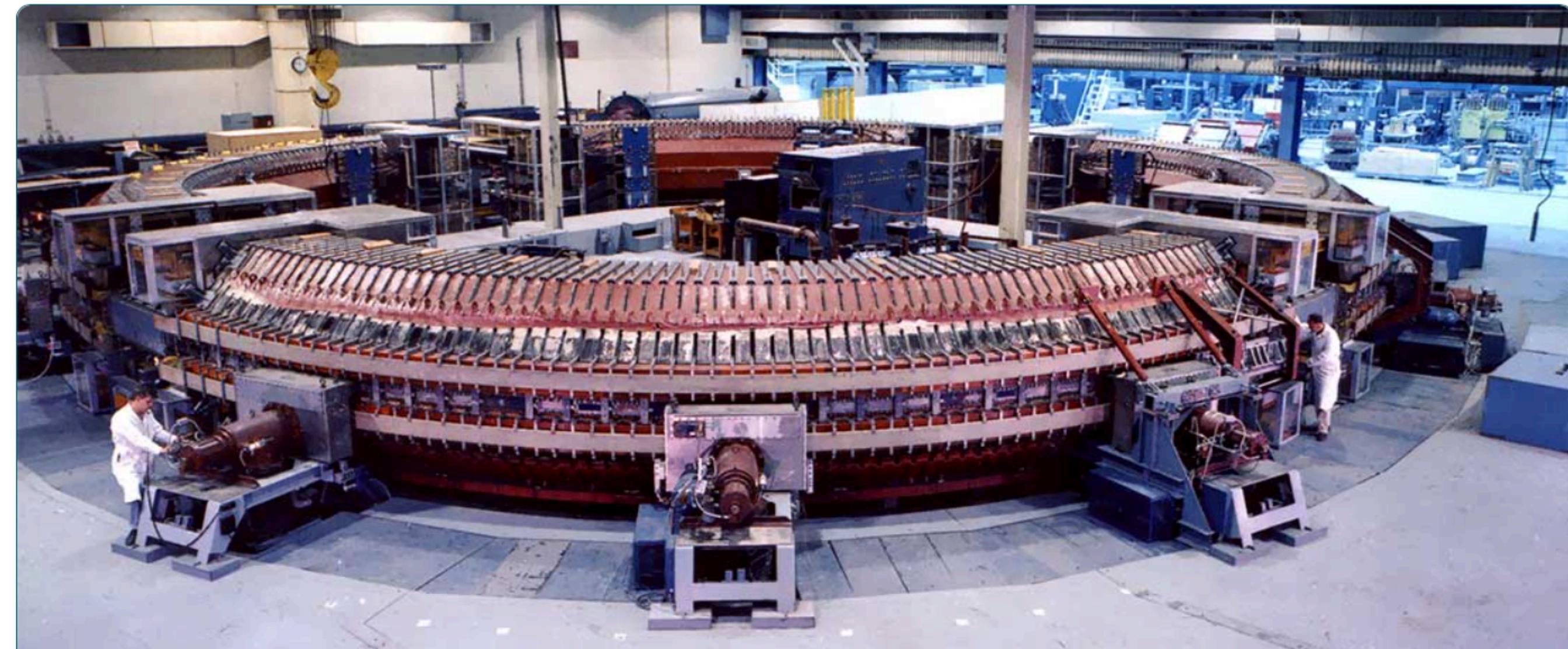


Aceleradores de partículas

- **Exercício 9:** pesquise sobre as diferenças entre o ciclotron e o síncrotron e explique os fundamentos de funcionamento de cada um deles.



las e Campos



Cosmotron (1952-1966)

Partículas estranhas...

- A profusão de novas partículas encontradas na década de 50, junto de suas peculiares propriedades, as levou a serem informalmente conhecidas por “partículas estranhas”.
- Dentre essas novas partículas estranhas estava o kaon (um méson), que sua versão sem carga poderia decair em dois píons
- $$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$
- e a partícula Λ , que hoje sabemos ser um bárion, e que foi observada decair da seguinte forma:
$$\Lambda \rightarrow p^+ + \pi^-.$$
- O decaimento ocorria num tempo da ordem de 10^{-10} s.
- A criação delas foi também detectada em aceleradores. E curiosamente, a criação parecia só ocorrer em energias muito mais altas, compatíveis com a força forte, e seguindo uma regra exótica, diferente do mecanismo de decaimento.

Estranheza (S)

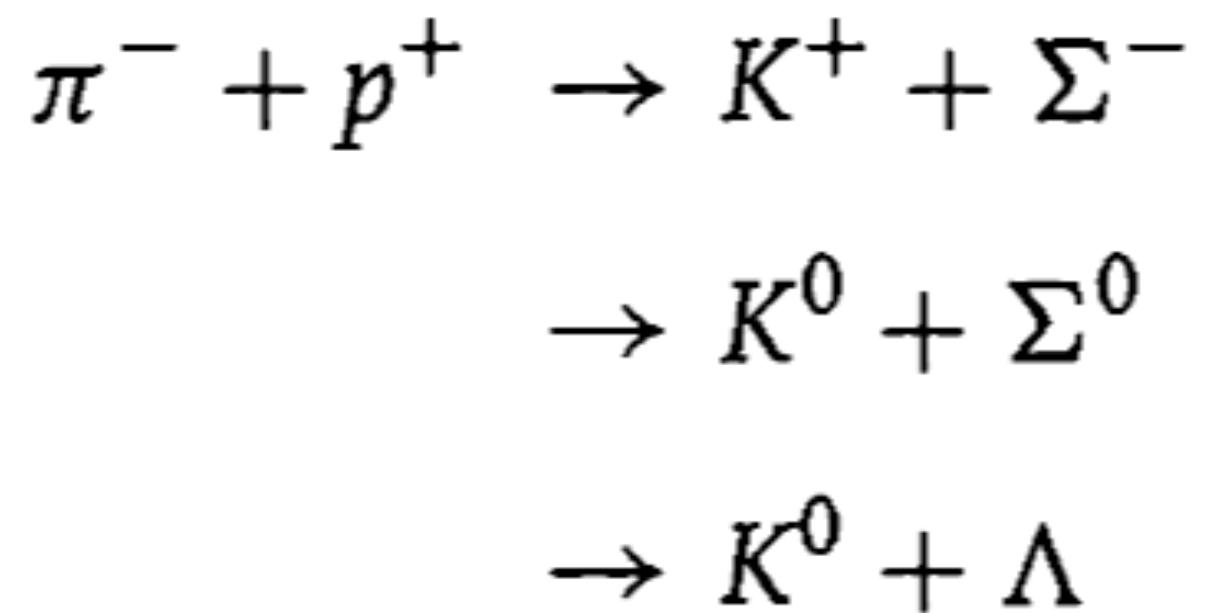
- Em 1953 e 1955, Gell-Man ([artigo](#)) e Nishijima ([artigo](#)) propõe a seguinte estrutura associada a essas partículas estranhas (como o K e o Λ , dentre outras):
 - Existe uma nova grandeza que é conservada (além do número leptônico, número bariônico e carga elétrica), essa nova “carga” conservada é chamada de estranheza e denotada por S .
 - Interações fortes preservam a estranheza, mas interações fracas violam a conservação dessa grandeza.
 - Partículas estranhas decaem devido à força fraca, mas sua criação está relacionada à força forte.
- Na época os quarks ainda não eram conhecidos. Atualmente, as propriedades acima seguem sendo válidas, mas há uma forma mais fundamental de computar a estranheza:

$$S = -\text{número de quarks s} + \text{número de antiquarks s} .$$

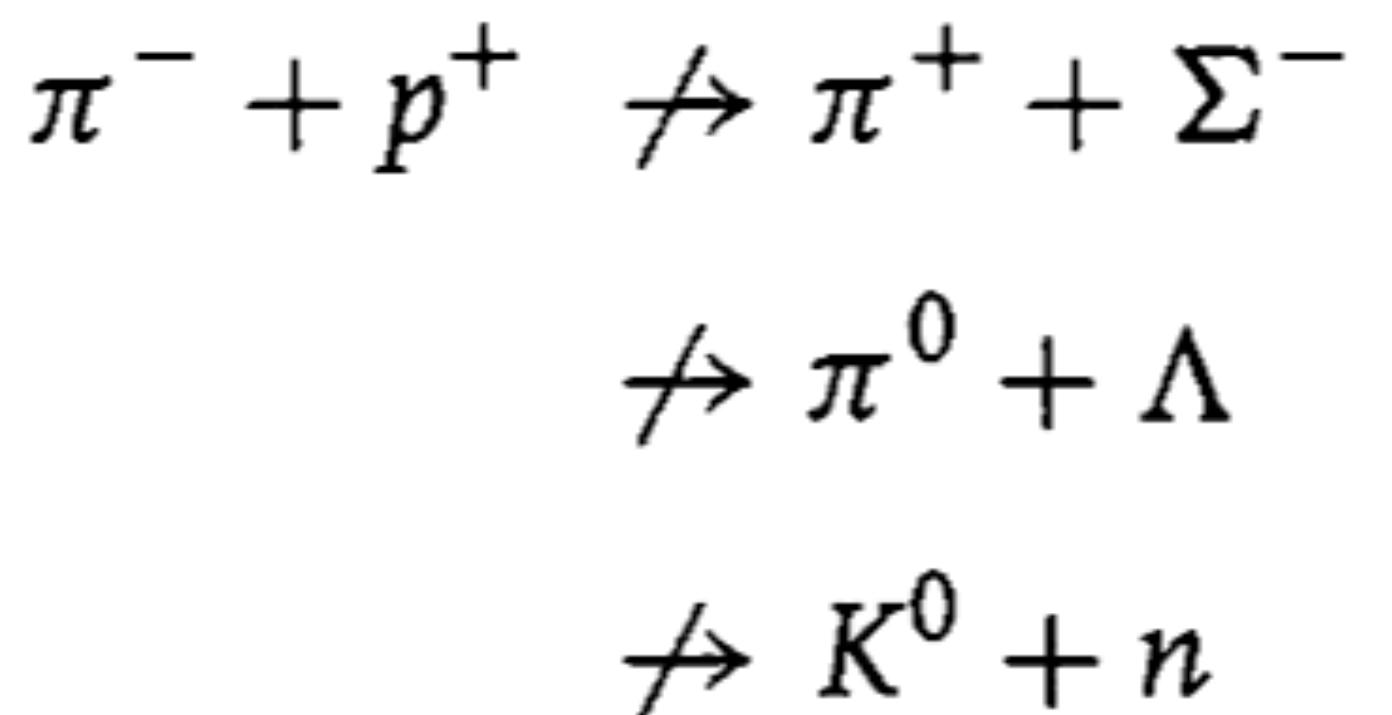
- s é o nome de um tipo de quark, o quark s é também chamado de quark estranho (*strange*). O motivo do quark s ter estranheza negativa (ao invés de positiva) é por motivos históricos.

Estranheza (S)

- Exemplo de possíveis processos que levam a partículas estranhas:

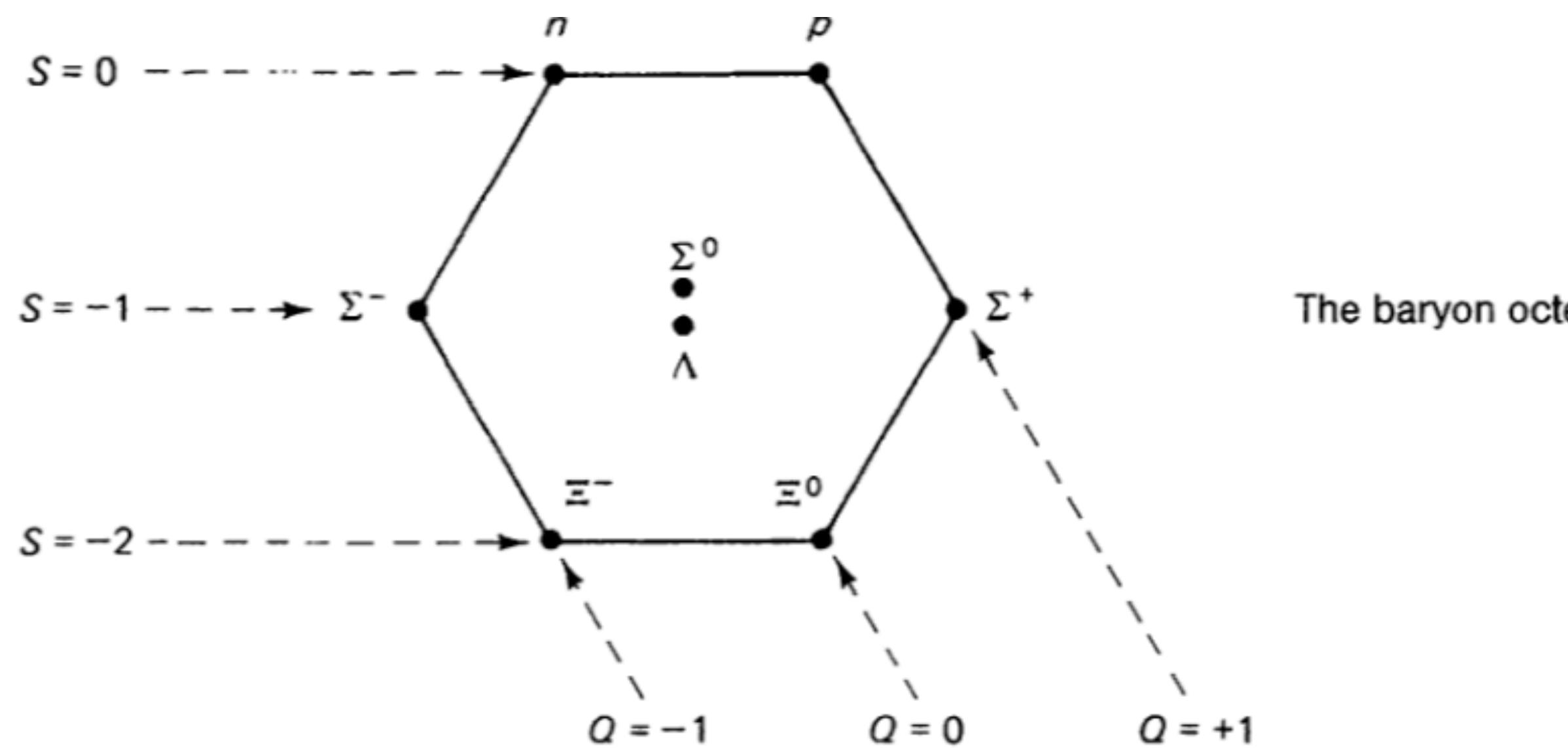


- Os kaons, que são mésons, têm $S = 1$, enquanto os bárions Σ e Λ têm $S = -1$.
- Exemplos de processos não permitidos:

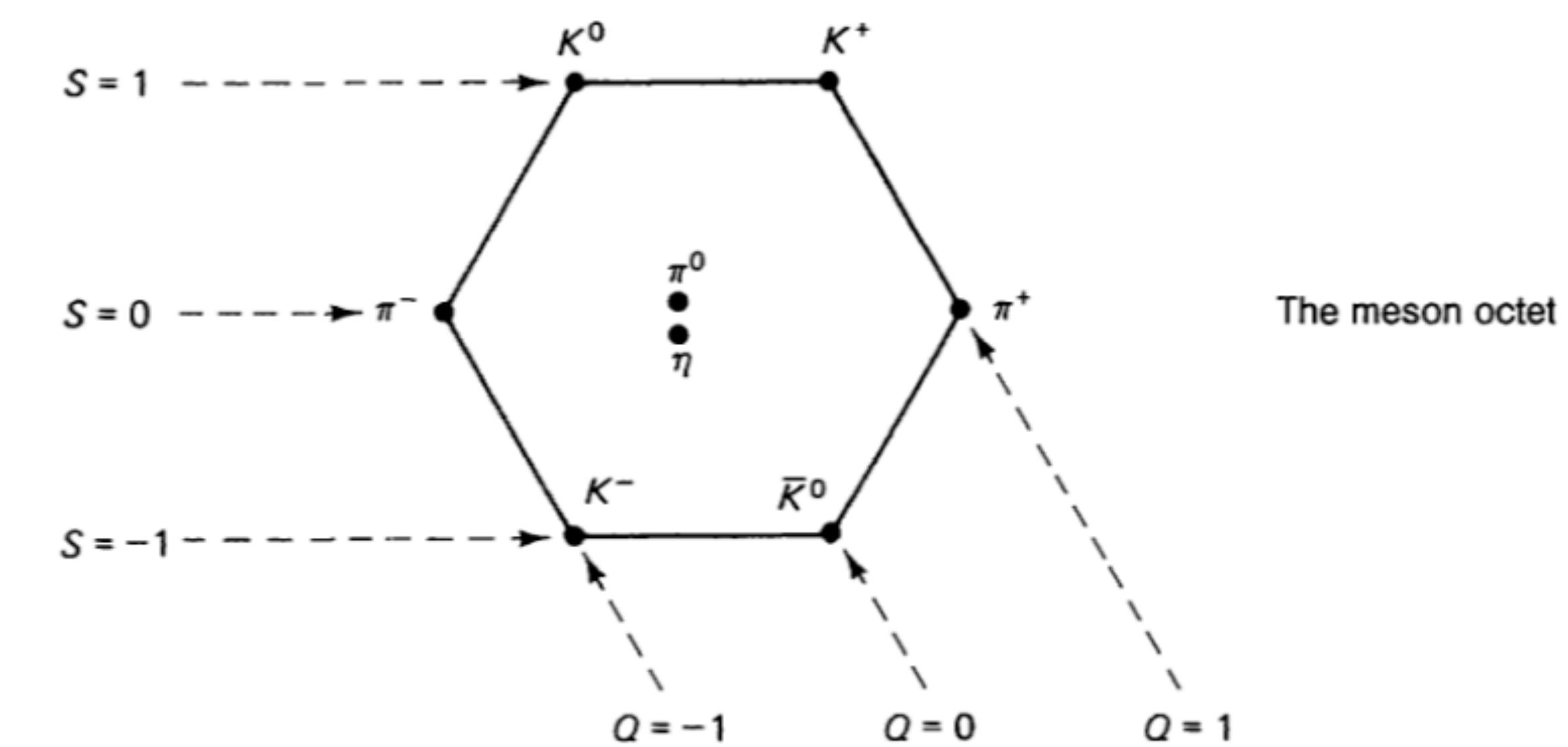


O Caminho Óctuplo (*eightfold way*)

- Havia muitas partículas novas. Faltava ordem.
- Gell-Mann em 1961 propõe uma organização chamada de *eightfold way*. Abaixo seguem dois exemplos:



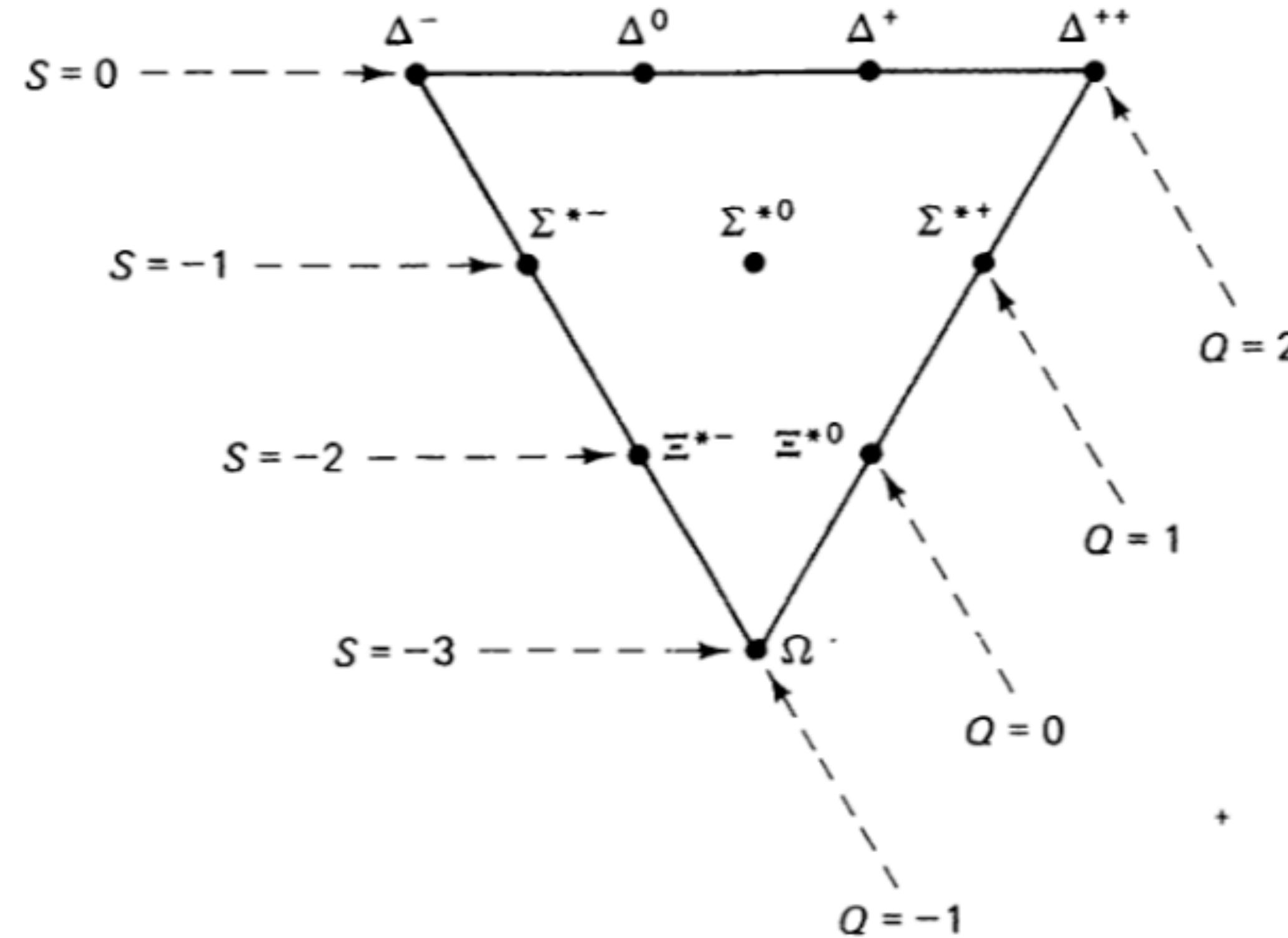
The baryon octet



The meson octet

- Esta forma peculiar de reorganizar as partículas sugeria algum padrão mais fundamental. O *status* do *eightfold way* se tornou alto não tanto devido a essas classificações acima, mas à seguinte consequência tendo em vista os bárions delta:

O Caminho Óctuplo (*eightfold way*)



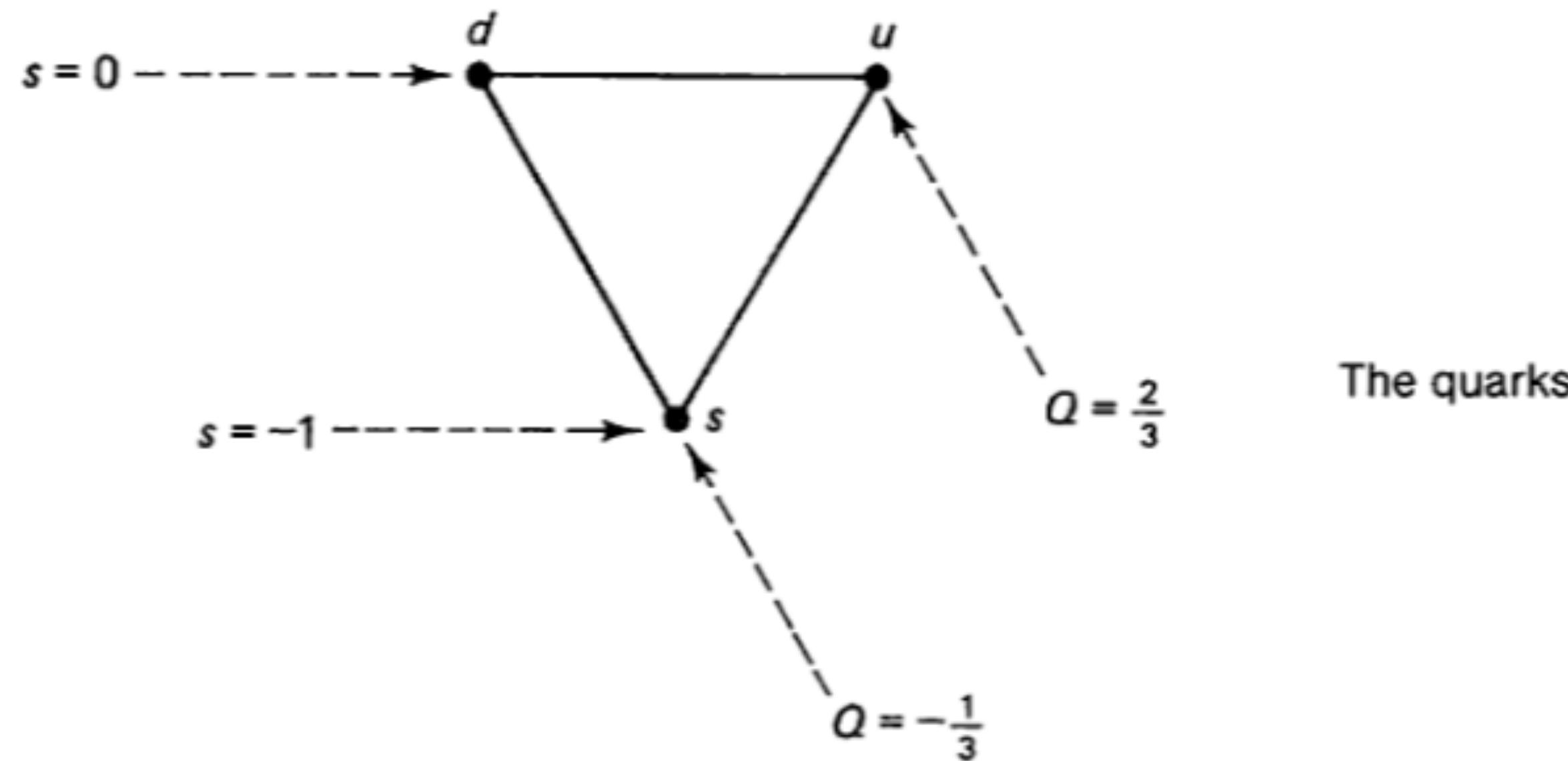
- Este diagrama segue o mesmo espírito dos anteriores, mas começa com os bárions delta ($S = 0$) e vai reduzindo a estranheza até $S = -3$. Todas as partículas acima eram conhecidas, exceto por uma, o bárion Ω^- . Gell-Mann calculou sua massa e outras propriedades e... E [ela foi detectada!](#)

Massa do Ω^-

- **Exercício 10:** A fórmula da mass para o diagrama triangular anterior é simples. Gell-Mann observou que a diferença de massas entre $S = 0$ e $S = -1$ era aproximadamente a mesma que entre $S = -1$ e $S = -2$. A partir desta observação simples e dos valores das massas das outras partículas, estime a massa de Ω^- e compare com o valor atual. Indicar as fontes usadas (há várias possíveis, o livro do Tipler, o do Griffiths... Não vale naturalmente “Google”, “Wikipedia”... mas esses podem ser usados como meio para chegar até às fontes de dados).
- Outra sugestão: acabei de verificar que se você digitar, por exemplo, “Omega baryon mass” (ou qualquer outra dessas partículas citadas) no Wolfram Alpha, ou na interface do Mathematica, ele te dá a resposta. Neste caso, a resposta numérica é imediata. O que dá mais trabalho é descobrir a fonte de informação do Wolfram Alpha/Mathematica.
- Não é necessário para este exercício, mas uma outra fonte de informação, que é a mais confiável e atualizada de todas, trata-se do site do *Particle Data Group*. Ver <https://pdg.lbl.gov>.

Quarks!

- O que estaria por trás do sucesso do *eightfold way*? Por que ele funciona?



- Gell-Mann e Zweig independentemente, em 1964, propuseram uma estrutura mais fundamental, a partir de triângulos como o acima, cujos vértices seriam partículas até então desconhecidas... Os **quarks**. Foi Gell-Mann quem os batizou de quarks, usando certa referência à obra *Finnegans Wake* de James Joyce ("Three quarks for Muster Mark!")

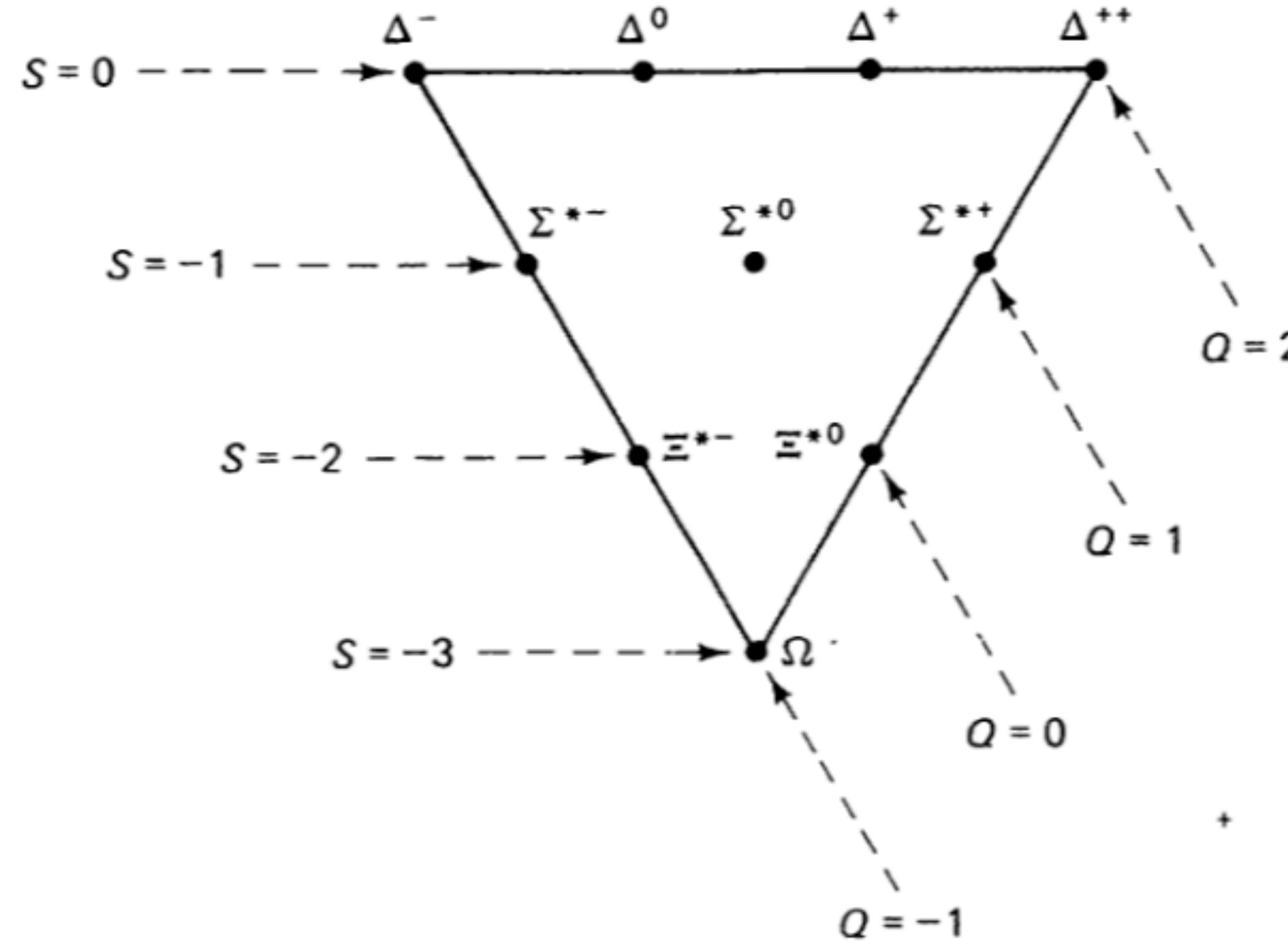
Quarks e suas cargas

Tabela 12-5 Números quânticos internos dos quarks

Quark	Q	B	U	D	C	S	T	B'
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	0	0
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	-1	0	0	0	0
c	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1	0	0	0
s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	-1	0	0
t	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	1	0
b	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	-1

Do livro do Tipler

Quarks e a origem do *eightfold way*



The baryon decuplet			
qqq	Q	S	Baryon
uuu	2	0	Δ^{++}
uud	1	0	Δ^+
udd	0	0	Δ^0
ddd	-1	0	Δ^-
uus	1	-1	Σ^{*+}
uds	0	-1	Σ^{*0}
dds	-1	-1	Σ^{*-}
uss	0	-2	Ξ^{*0}
dss	-1	-2	Ξ^{*-}
sss	-1	-3	Ω^-

- Entendimento do triângulo de bárions que vimos antes (*baryon decuplet*) a partir dos quarks.
- Inicialmente eram conhecidos 3 “sabores” de quarks: up (u), down (d) e strange (s). Atualmente sabemos que há mais outros 3 sabores: charm (c), bottom (b) e top (t).

Quarks: duas dificuldades

- Experimentos posteriores de espalhamento, estavam de acordo que os bárions e mésons tinham subestruturas.
- Contudo, ao contrário de outros desenvolvimentos, as partículas preditas, os quarks, nunca foram individualmente observados.
- Historicamente, de início a razão para isso não era clara. Havia expectativa de encontrar essas partículas novas que poderiam ter carga elétrica de $1/3$ da do elétron. Quanto mais energia era usada, mais partículas eram criadas, todas em acordo com os princípios do *eighthfold way*, mas os quarks em si nunca apareciam.
- Surge a hipótese de confinamento dos quarks: existiria algum mecanismo que impediria de quarks serem observados isoladamente.
- Outro problema encontrado foi devido ao princípio da exclusão de Pauli: quarks têm spin $1/2$, logo deveriam estar sujeitos a esse princípio; entretanto o bárion Δ^{++} , por exemplo, era composto de três quarks do mesmo tipo (uuu). Como isso seria possível?

Quarks têm sabor e cor (mas não da forma que você está imaginando)

- Além dos sabores, foi necessário introduzir um novo número quântico: a cor. As quais foram chamadas de azul, vermelho e verde. Todos esses nomes são propositalmente arbitrários.
- Devido à distinção por cor, uma partícula poderia ser formada por uuu , desde que houvesse distinção de cor entre esses.
- É estranho que essa complicação toda, que sofreu críticas no início, tenha por fim dado certo, e junto a ela esta nova regra:
- **Todas as partículas que podem ser medidas são “sem cor”.**
- “sem cor” quer dizer que no total ou possuem as 3 cores, ou possuem uma cor oposta de forma a anular a original. Ou seja, qqq pode ser uma partícula mensurável se cada quark tiver uma cor diferente. $q\bar{q}$ também, desde que \bar{q} tenha a “anti-cor” de q .

Quarks têm sabor e cor (mas não da forma que você está imaginando)

	Primeira geração	Segunda geração	Terceira geração
Carga	Quarks		
+2/3	u_r u_b u_g	c_r c_b c_g	t_r t_b t_g
-1/3	d_r d_b d_g	s_r s_b s_g	b_r b_b b_g
	Léptons		
-1	e	μ	τ
0	ν_e	ν_μ	ν_τ

Glúons, confinamento e a QCD

- O problema de confinamento dos quarks ainda não foi inteiramente resolvido.
- Há fortes indícios de que a teoria da Cromodinâmica Quântica (QCD, de Quantum Chromodynamics) seja a teoria por trás das interações entre os quarks. É a QCD a teoria da força forte, como hoje entendemos a força forte.
- Tal como o nome sugere, a QCD está intimamente associada às cores. Assim como na eletrodinâmica (clássica e quântica) há uma simetria associada à conservação da carga elétrica (dado pelo grupo $U(1)$). Na QCD, que está associada a 3 cargas diferentes, a simetria relevante está associada ao grupo $SU(3)$.
- A QCD é em essência a quantização da ação de Yang-Mills com simetria $SU(3)$. As partículas oriundas da quantização do campo da força forte são os **glúons**.

Lagrangeana de Yang-Mills

- A ação do eletromagnetismo, com fontes, é baseada na seguinte lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{field}} + \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - A_\alpha J^\alpha$$

- Acima, $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. E as equações de Maxwell são dadas por $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta$.
- A ação de Yang-Mills é baseada na seguinte lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F^2) = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a$$

- Acima, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$, $A_\mu = \sum_{a=1}^3 A_\mu^a T^a$ e $[T^a, T^b] = i \sum_{c=1}^3 f^{abc} T^c$

Standard Model of Elementary Particles

