Relatividade Geral I: PPGFis & PPGCosmo. 2024/1
Prof. Davi C. Rodrigues

Lista de exercícios.
Entregar até o dia da primeira prova.

Questão 1. Rotações e transformações de coordenadas

Seja $\vec{V}$ um vetor no espaço Euclidiano bidimensional ($\mathbb{E}^2$).
a) Considerando a base vetorial canônica nesse espaço $(\hat{i}, \hat{j})$, encontre diretamente (sem usar a lei de transformação do item a seguir) como as componentes de $\vec{V}$ se transformam por uma rotação de θ do sistema de coordenadas.
b) Verifique se as componentes de $\vec{V}$ satisfazem a seguinte lei de transformação $V'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} V^j$.

Questão 2. Identidades vetoriais e ϵ^{ijk}

Demonstre as seguintes identidades vetoriais no espaço $\mathbb{E}^3$ (respostas para uma componente particular não serão consideradas):
i) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) = 0$,

ii) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$,

iii) $\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times \vec{\nabla} f$,

iv) Considere a métrica $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1 \;\; +1 \;\; +1 \;\; +1)$. Sejam $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ e $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$, com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Mostre que $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$. Seja $B^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F_{jk}$, com $i, j, k = 1, 2, 3$. Mostre que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

Questão 3. Derivada covariante e produto interno

i) a) Expresse $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ usando a notação tensorial (em $\mathbb{E}^3$). b) Deduza $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ em coordenadas cilíndricas. Dica: $\Gamma^j_{ij} = \partial_i \ln \sqrt{g}$.

ii) a) Seja $A_\mu(x)$ campo vetorial covariante. Mostre que $\partial_\mu A_\nu$ não é tensor. b) Seja $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Mostre que $F_{\mu\nu}$ é tensor. Dica: Mostre que $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$.

Questão 4. Propriedades simples de tensores

i) Mostre que todo tensor de posto 2 pode ser decomposto num tensor anti-simétrico mais um simétrico.

ii) Seja $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$. Mostre que $U^\mu U^\nu A_{\mu\nu} = U^\mu U^\nu A_{(\mu\nu)}$.

iii) Seja $\delta_{\mu\nu}$ certo objeto tal que $\delta_{\mu\nu} = 1$ se $\mu = \nu$ e $\delta_{\mu\nu} = 0$ caso contrário. Assuma ainda que esta definição é válida para qualquer sistema de coordendas. Mostre que $\delta_{\mu\nu}$ não descreve um tensor de posto 2 covariante.

Questão 5. Cálculo de componentes da métrica

1. Encontre os símbolos de Christoffel, os tensores de Ricci e os escalares de Ricci associados aos seguintes elementos de linha:

a)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

b)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2}dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

em que Λ é constante.

c)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

em que M é constante.

d) É possível que as métricas dos itens b) e c) acima estejam relacionadas por transformação de coordenadas? Ou prove que não é possível, ou mostre como transformar as coordenadas de forma a obter uma a partir da outra.

e) Mostre que o elemento de linha apresentado no item a) acima é equivalente, a menos de uma mudança de coordenadas, ao elemento $ds^2 = a^2(t)\left(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$.

f) Mostre que para as métricas dos itens c) e b) raios de luz propagam distâncias espaciais diferentes para intervalos de tempos iguais, dependendo da direção de propagação (se é radial ou não). Em seguida, mude o sistema de coordenadas de forma a tornar a distância percorrida independente da direção.

Questão 6. Geodésicas e fluido de poeira

Considere um fluido tipo poeira, cujo tensor energia momento é dado por T^{α}_{β}. Mostre que a equação $\nabla_{\alpha}T^{\alpha}_{\beta} = 0$ implica que cada partícula deste fluido segue uma geodésica.

Questão 7. Ação, tensor energia-momento e equações de campo

i) Encontre as equações de campo e o tensor energia momento da seguinte ação:

$$S[A] = k\int\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m^2 A_{\mu}A^{\mu}\right)\sqrt{-g}d^4x,$$

em que $F_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu}$. Esta é chamada de ação de Proca. Descreve uma variação de eletromagnetismo cujas partículas ("fótons") são massivos. Por fim, mostre que a presença da massa quebra a simetria de calibre que está presente no eletromagnetismo usual, mas não na ação acima.

ii) Encontre as equações de campo da seguinte ação:

$$S[g] = k\int f(R)\sqrt{-g}d^4x,$$

em que $f(R)$ é uma função do escalar de Ricci.