

Vitória, 16 de abril de 2024
 Universidade Federal do Espírito Santo
 Departamento de Física, CCE
 Primeira prova de Física Matemática I
 Prof.: Davi C. Rodrigues

Aluno: _____ Matrícula: _____

Instruções da prova: <https://www.davi.cosmo-ufes.org/fismati-2024.html>.

O total de pontos desta prova é 11,0. A nota máxima é 10,0.

1. (2,5 pontos) Considere um espaço vetorial V de corpo real cuja base seja dada por $\{1, t\}$. Um elemento geral deste espaço tem a forma $x(t) = a + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Considere ainda que V possui o seguinte produto interno: $\langle x|y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t)t^2 dt$. Encontre uma base ortonormal para V .

2. (2,5 pontos) Autovalores e autovetores de operadores Hermitianos.

a) Mostre que os autovalores de um operador Hermitiano são necessariamente reais.

b) Mostre que os autovetores de um operador Hermitiano, associados a autovalores distintos, são necessariamente ortogonais.

3. (2,5 pontos) Um operador unitário U é um operador cuja inversa satisfaz $U^{-1} = U^\dagger$, ou seja UU^\dagger é operador identidade. Seja $|u\rangle$ autovetor de um operador unitário $U : V \rightarrow V$, sendo V espaço vetorial de corpo complexo, e seja λ o autovalor correspondente. Verifique que $|\lambda| = 1$.

4. (2,5 pontos) Considere um espaço V com duas bases ortonormais $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$ e $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^N$. Para cada uma dessas bases, podemos encontrar uma representação matricial para um operador $A : V \rightarrow V$. Encontre uma equação que relacione essas matrizes que representam A .

5. (1,0 ponto) Mostre que a seguinte desigualdade é válida:

$$\left(\int_0^1 (t + t^3)e^t dt \right)^2 \leq \int_0^1 t^2 e^t dt \int_0^1 (1 + t^2)^2 e^t dt.$$