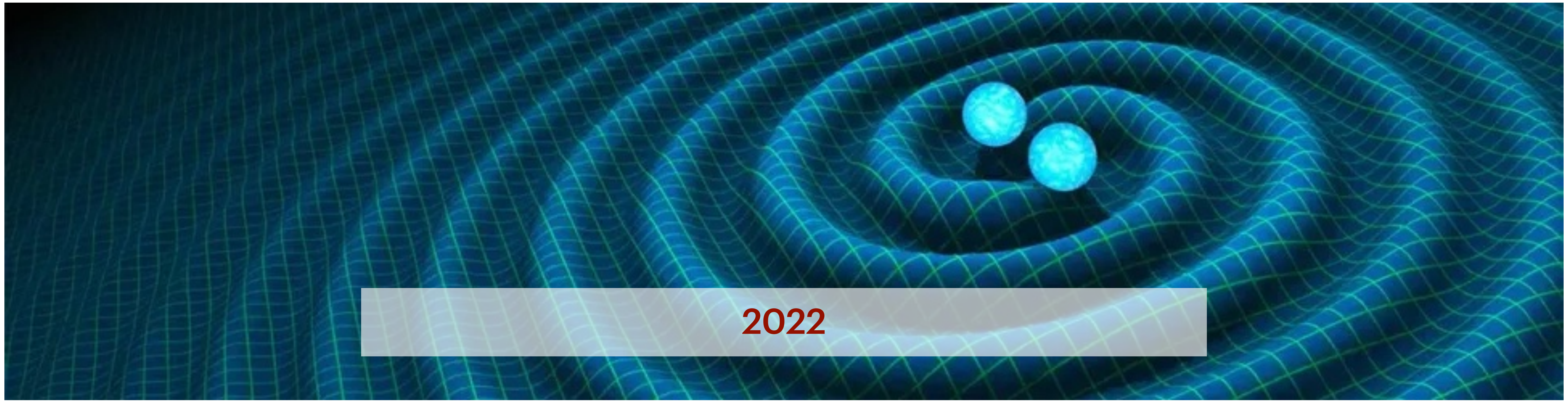
Introdução a tensores e o espaço-tempo

UFES
Universidade Federal do Espírito Santo

Davi C. Rodrigues
Universidade Federal do Espírito Santo
Vitória, ES - Brazil

Cosmo-ufes
Center for Astrophysics and Cosmology
www.cosmo-ufes.org

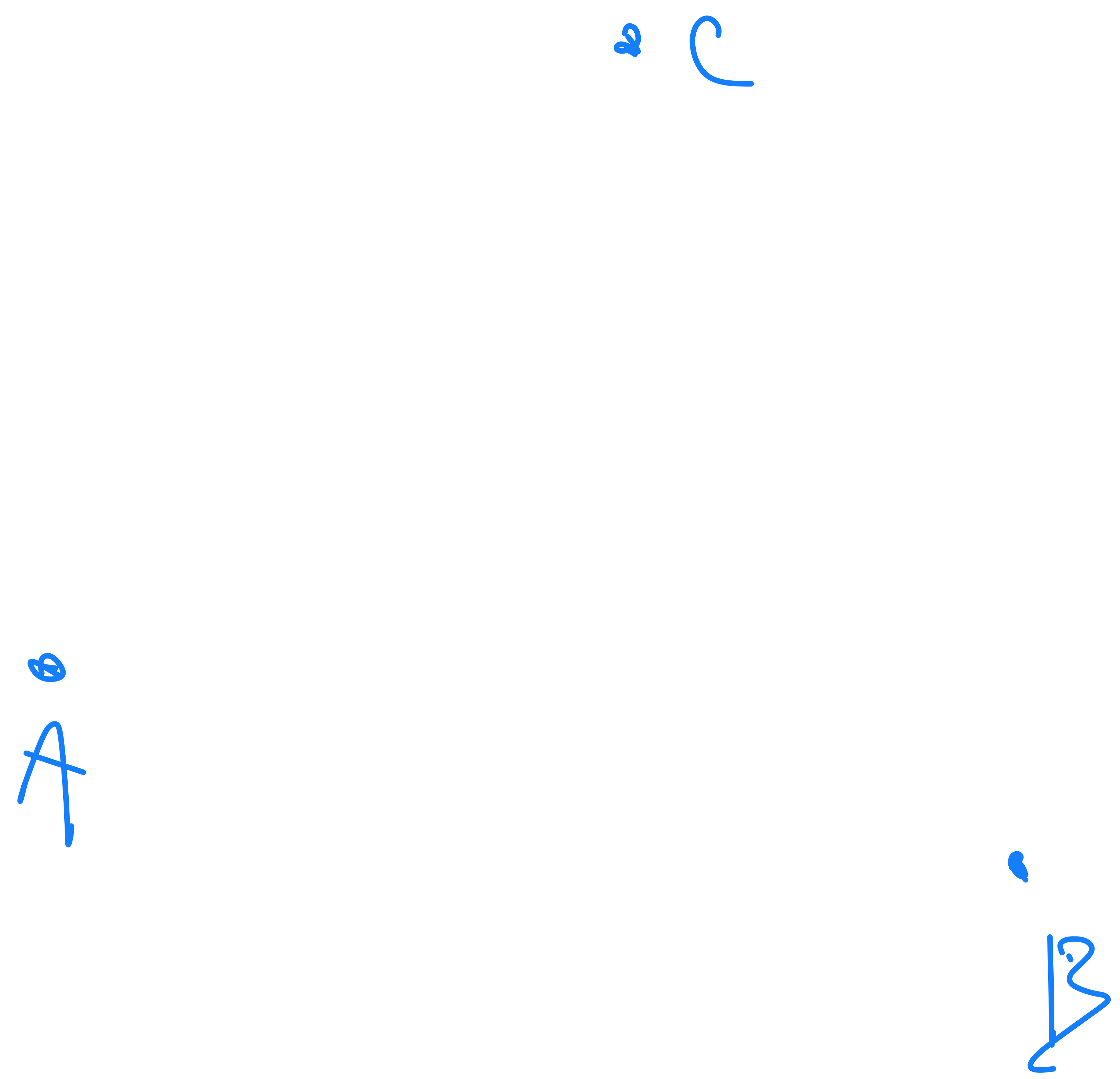
- Parte da disciplina Relatividade Geral I -



Parte 1
O que é um vetor?

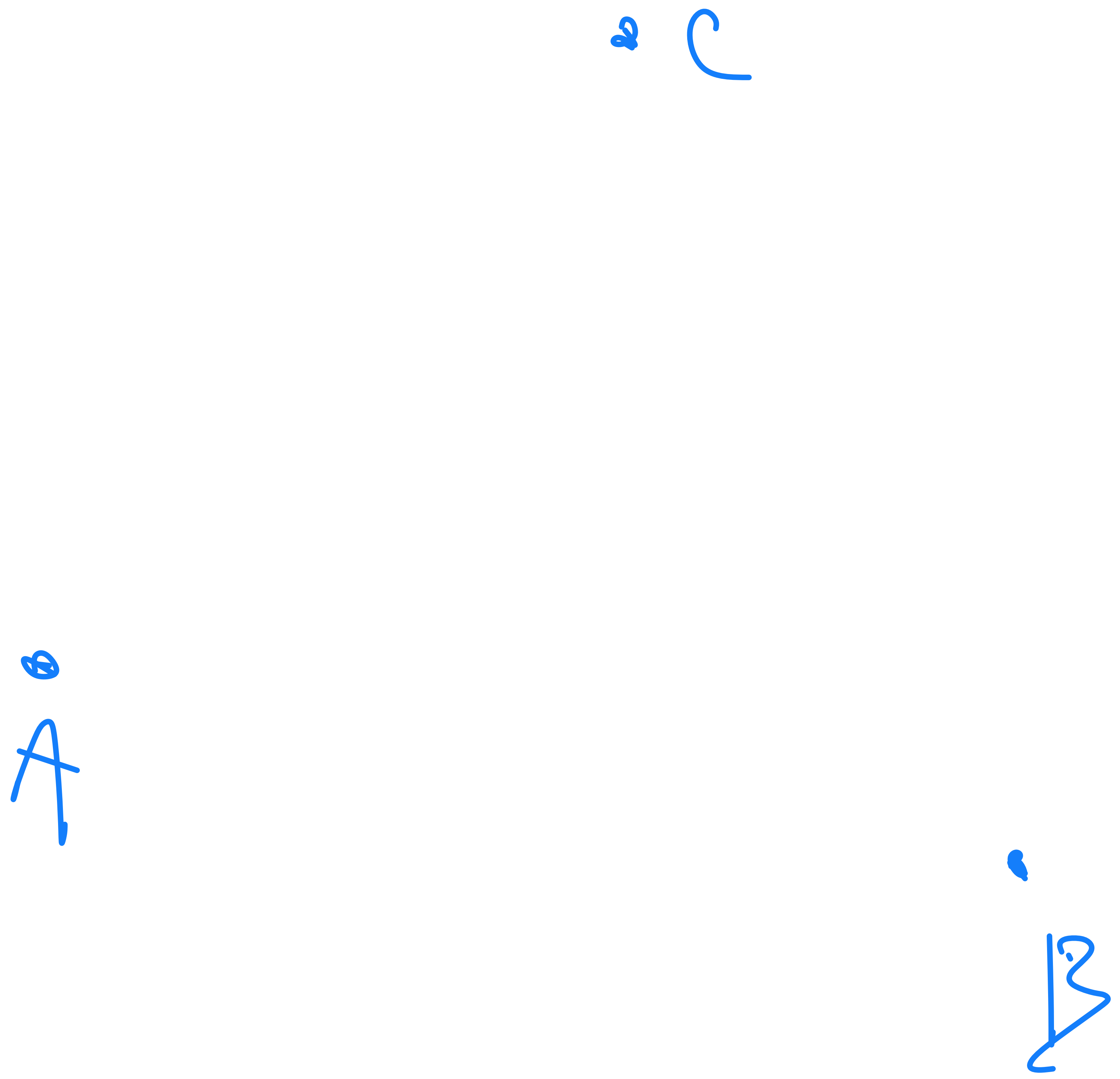
Pontos e vetores

- Comecemos com uma ilustração num espaço bem simples: um plano.
- Nesse plano, considere 3 pontos: A, B e C , como abaixo:



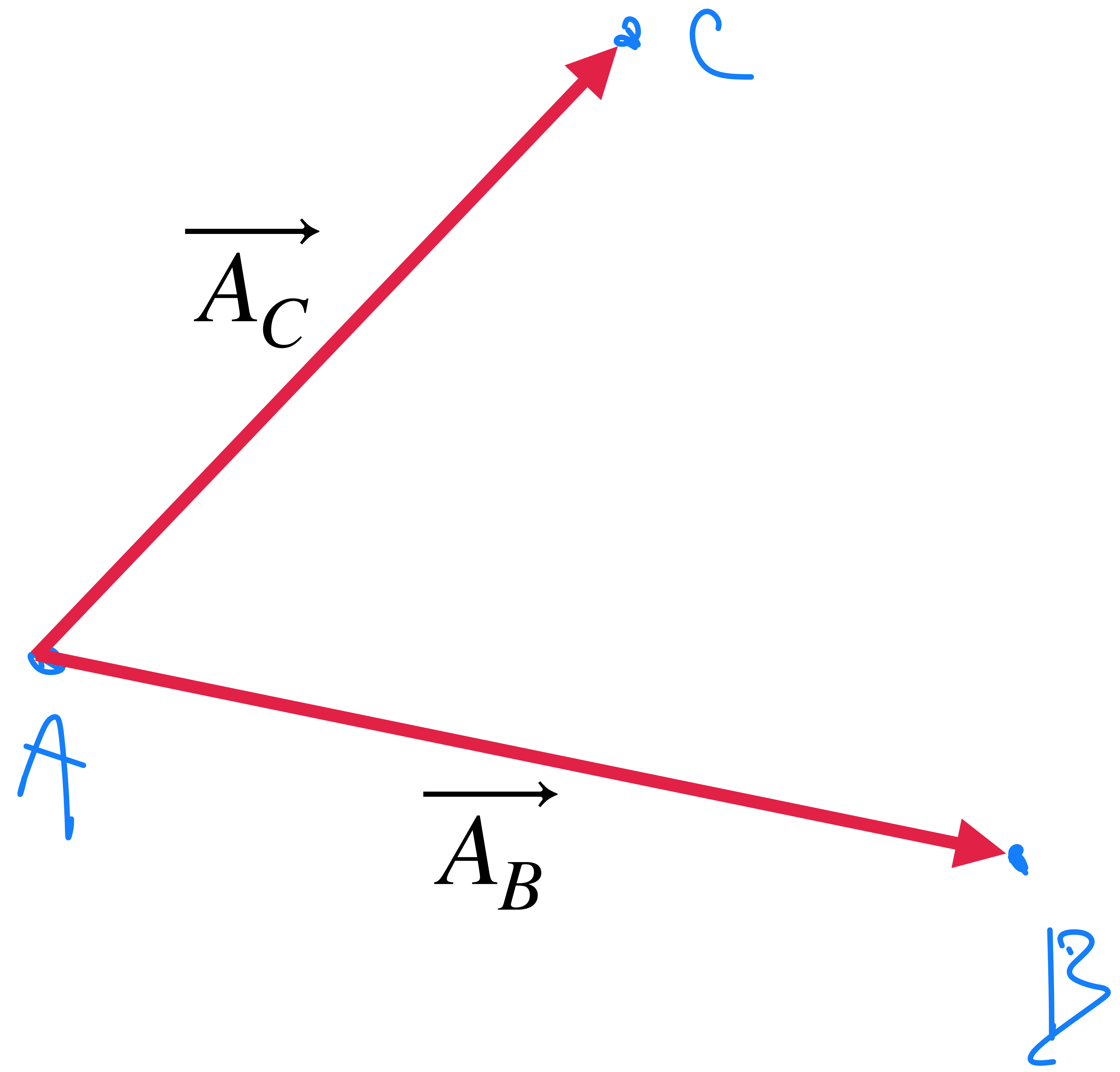
Pontos e vetores

- Podemos usar vetores para tratar da posição de B ou C com respeito a A.



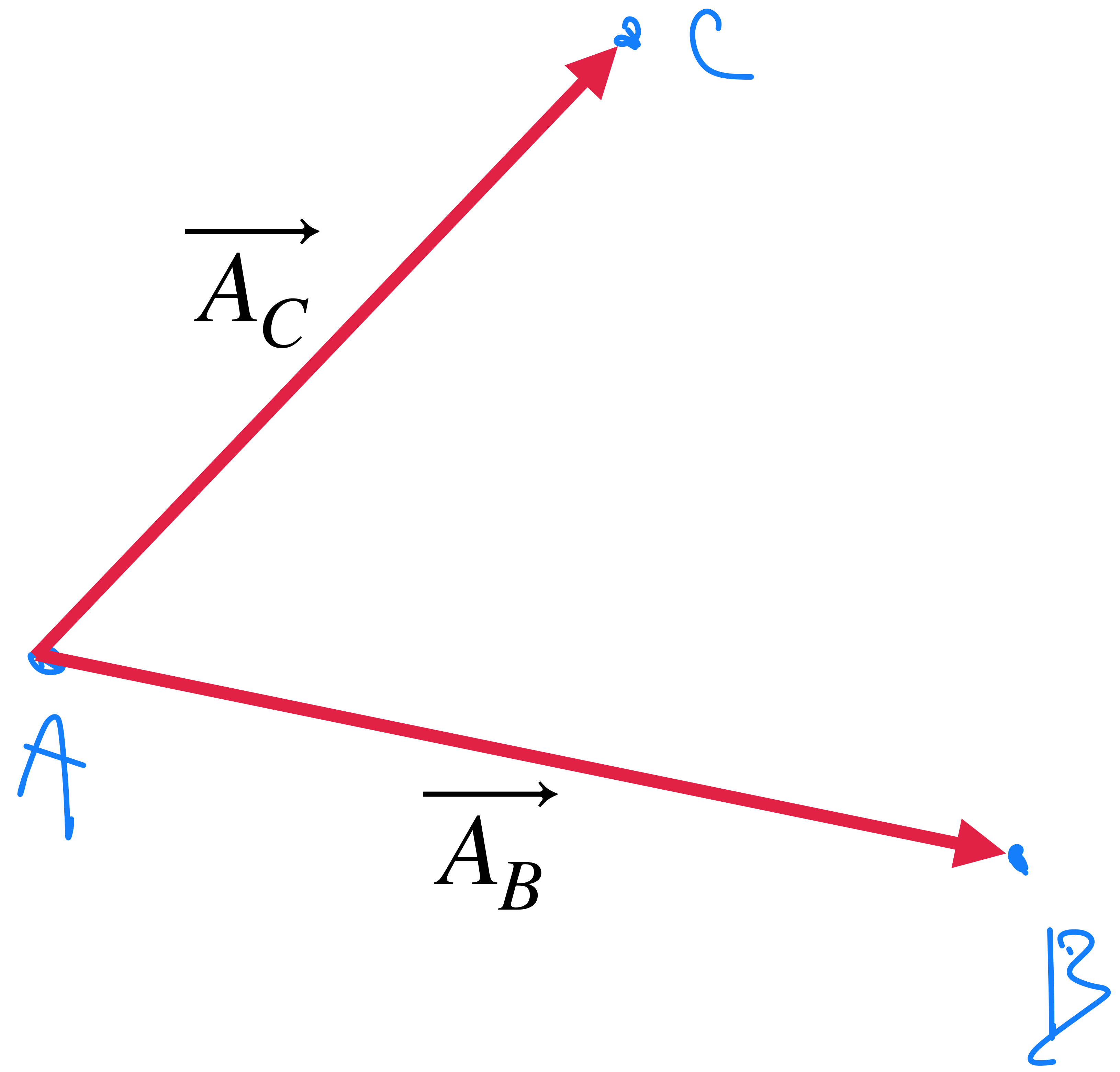
Pontos e vetores

- Podemos usar vetores para tratar da posição de B ou C com respeito a A.



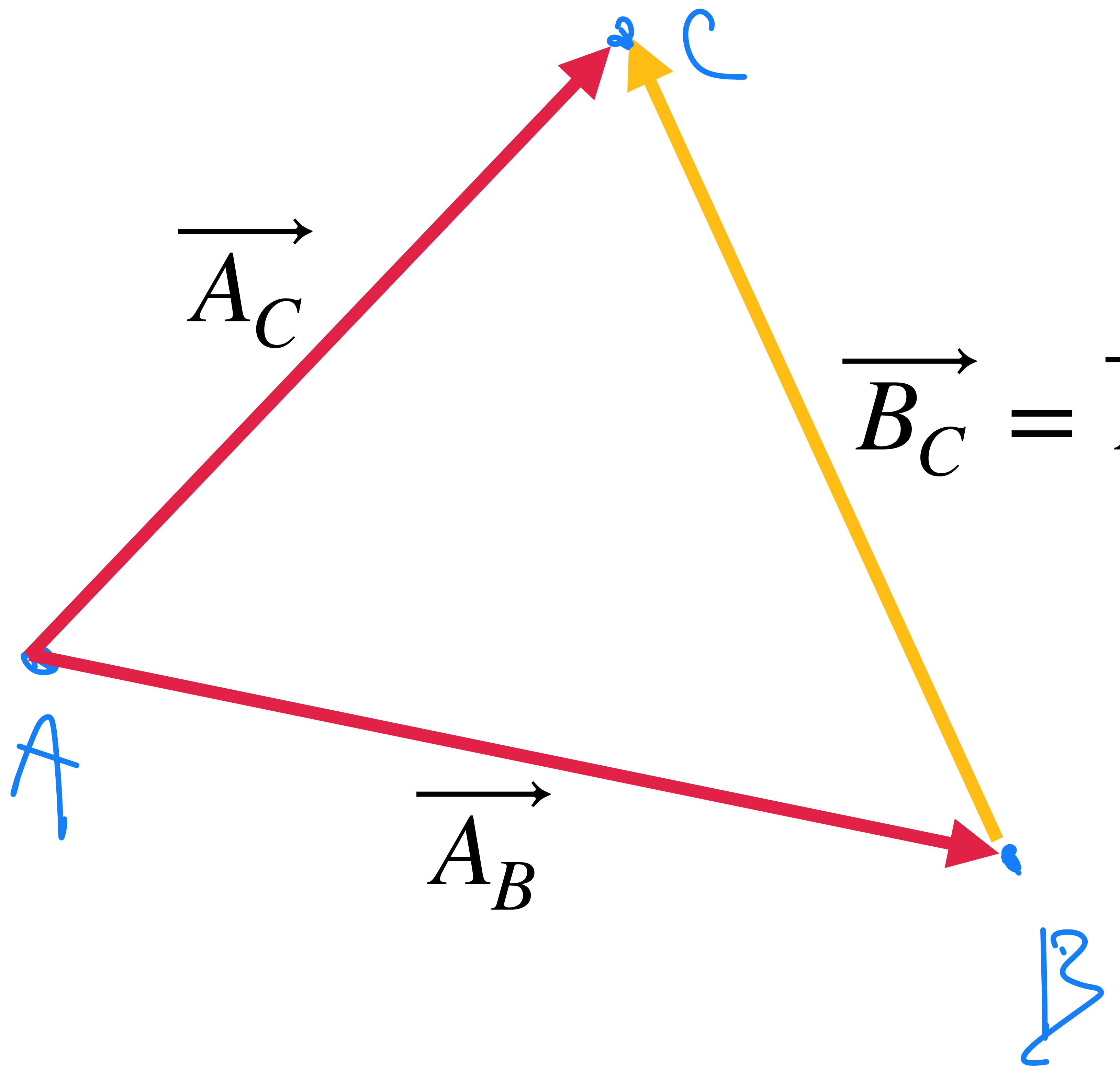
Pontos e vetores

- Podemos usar vetores para tratar da posição de B ou C com respeito a A.
- A posição de C com respeito a B pode ser facilmente deduzida.



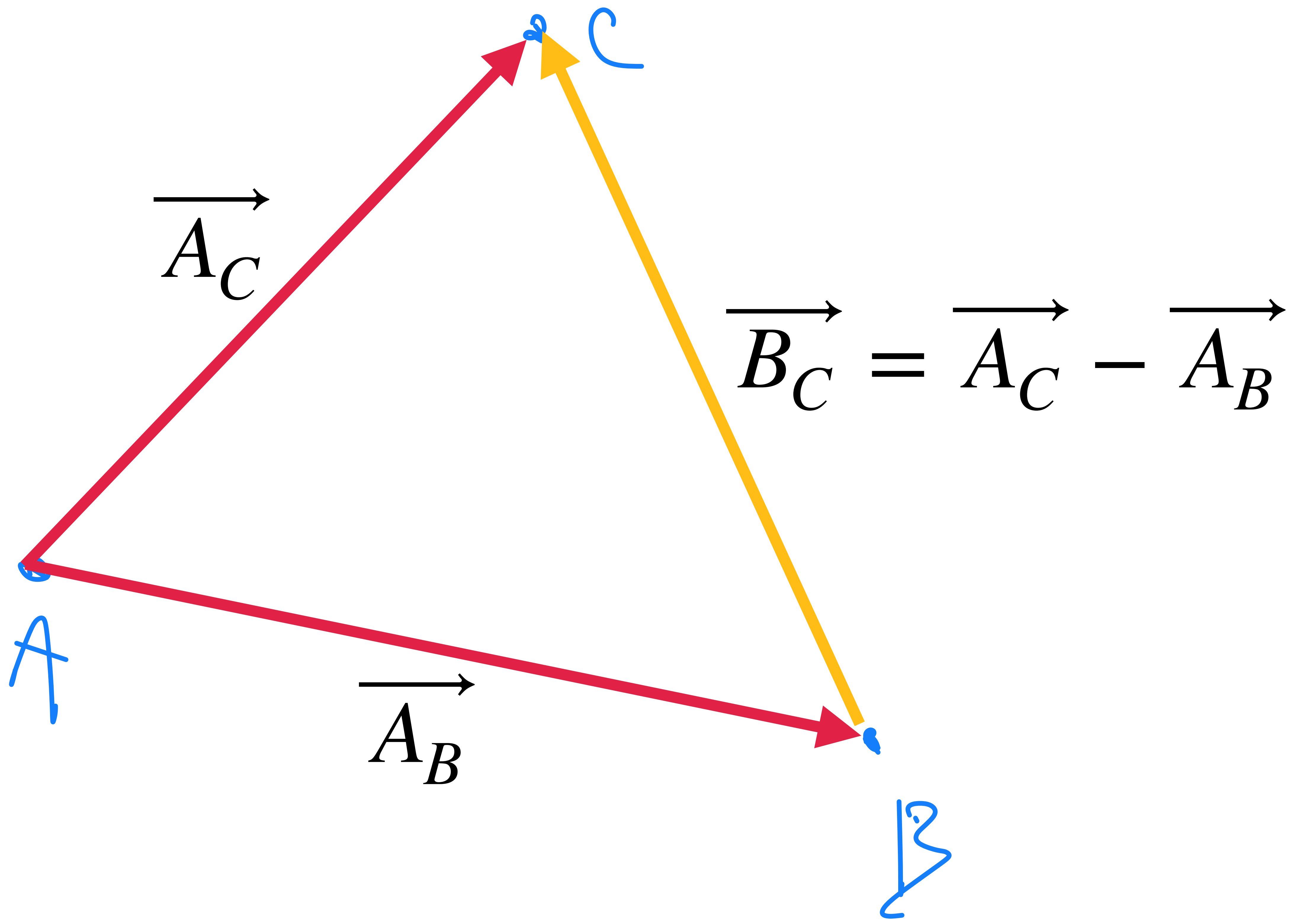
Pontos e vetores

- Podemos usar vetores para tratar da posição de B ou C com respeito a A.
- A posição de C com respeito a B pode ser facilmente deduzida.



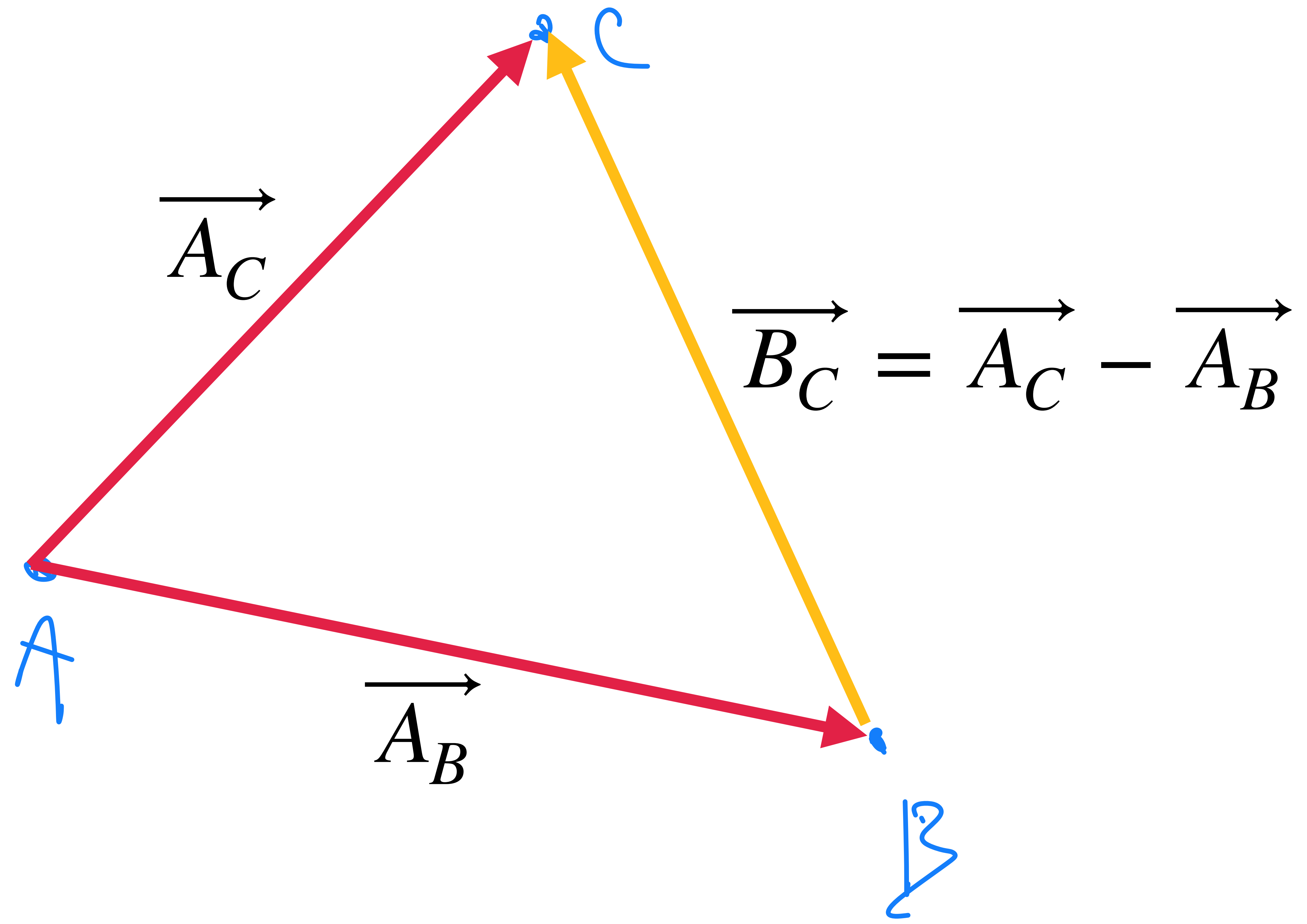
$$\overrightarrow{B_C} = \overrightarrow{A_C} - \overrightarrow{A_B}$$

Pontos e vetores



Pontos e vetores

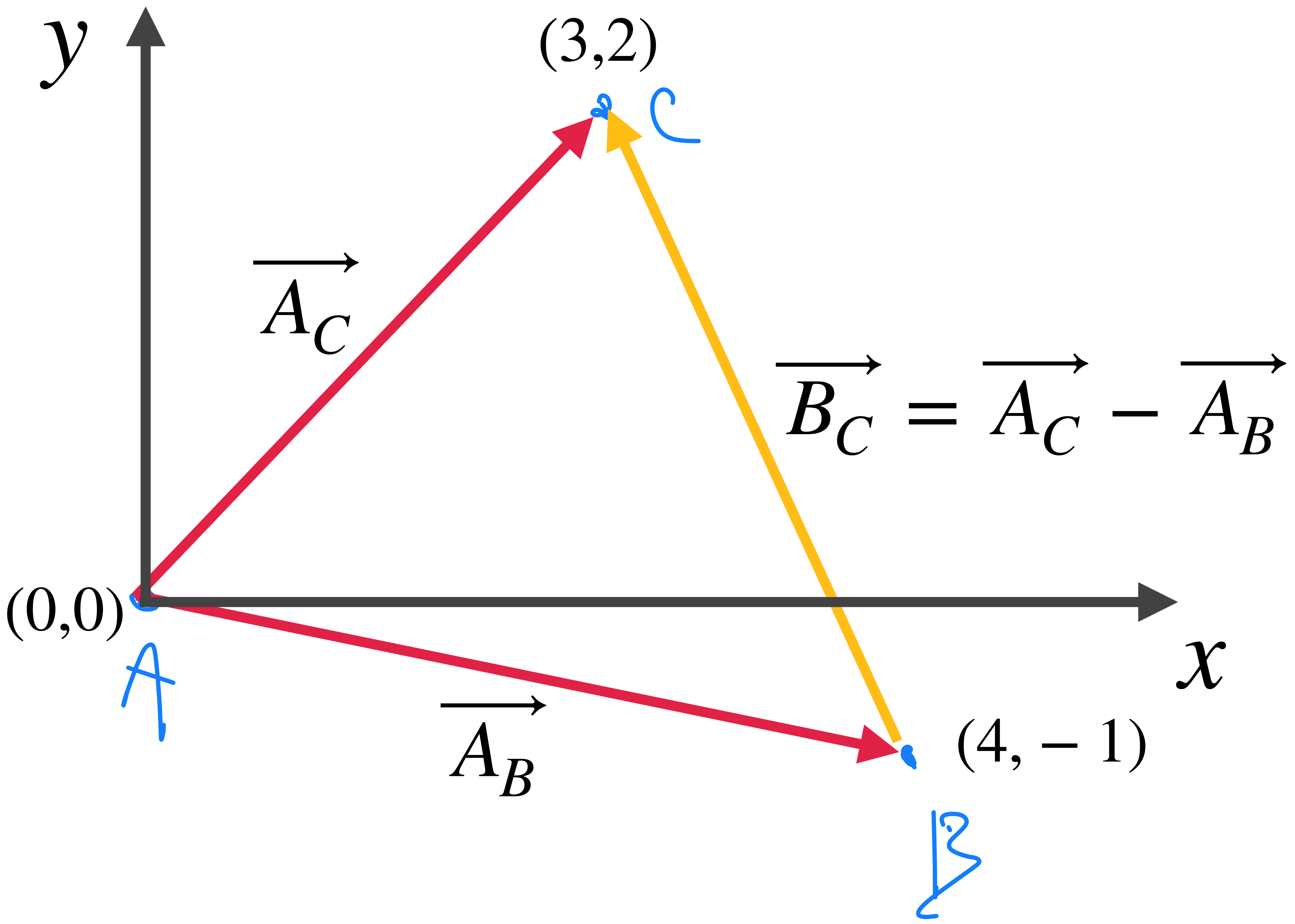
- Para encontrar a distância entre B e C explicitamente, mais dados precisam ser fornecidos.
- Por exemplo, $\|\overrightarrow{A_C}\|$, $\|\overrightarrow{A_B}\|$ e o ângulo entre $\overrightarrow{A_C}$ e $\overrightarrow{A_B}$ são dados suficientes.
- Alternativamente, pode-se introduzir um sistema de coordenadas (x, y).



6

Pontos e vetores

- Para encontrar a distância entre B e C explicitamente, mais dados precisam ser fornecidos.
- Por exemplo, $\|\overrightarrow{A_C}\|$, $\|\overrightarrow{A_B}\|$ e o ângulo entre $\overrightarrow{A_C}$ e $\overrightarrow{A_B}$ são dados suficientes.
- Alternativamente, pode-se introduzir um sistema de coordenadas (x, y).

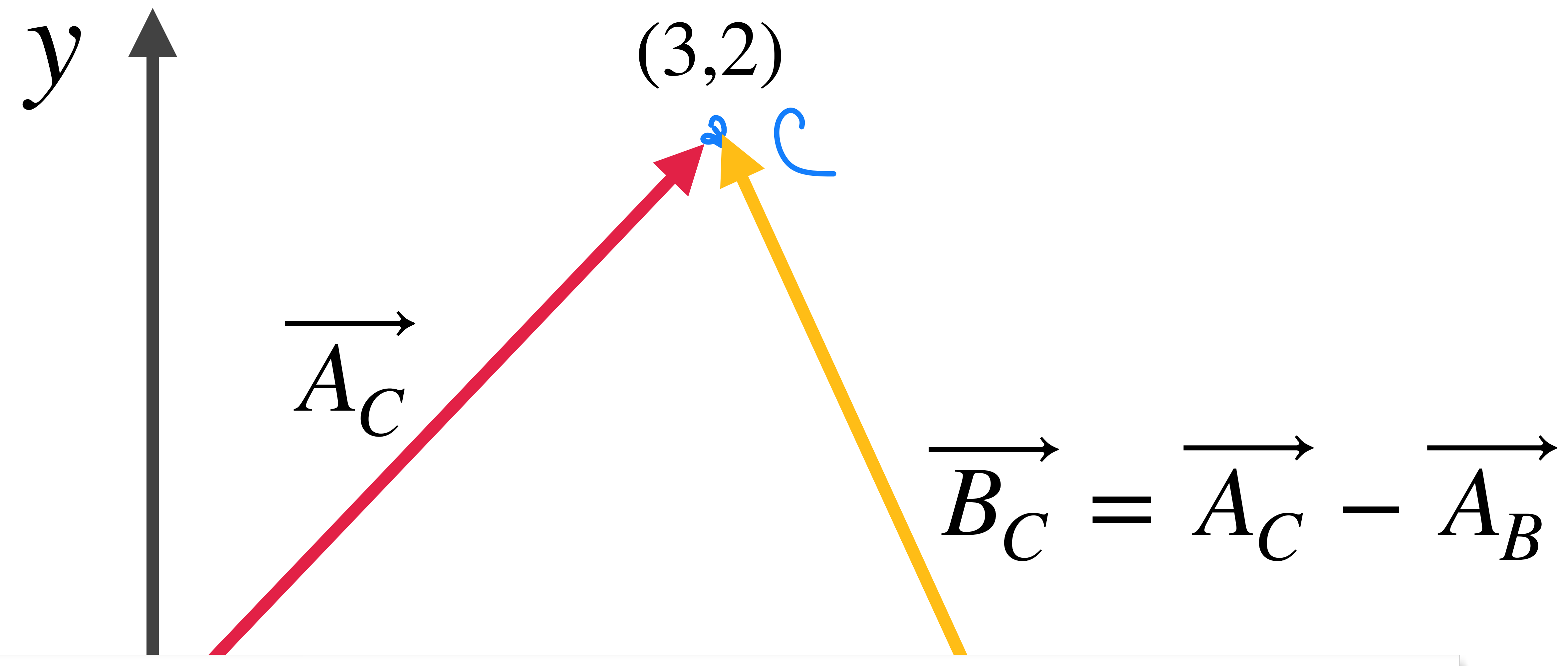


Pontos e vetores

- Para encontrar a distância entre B e C explicitamente, mais dados precisam ser fornecidos.
- Por exemplo, $\| \overrightarrow{A_C} \|$, $\| \overrightarrow{A_B} \|$ e o ângulo entre $\overrightarrow{A_C}$ e $\overrightarrow{A_B}$ são dados suficientes.
- Alternativamente, pode-se introduzir um sistema de coordenadas (x, y).

$$\overrightarrow{A_B} \doteq (4, -1)$$

$$\overrightarrow{A_C} \doteq (3,2)$$



Usarei "$\doteq$" para dizer que o vetor é *representado* pelo par (x, y).

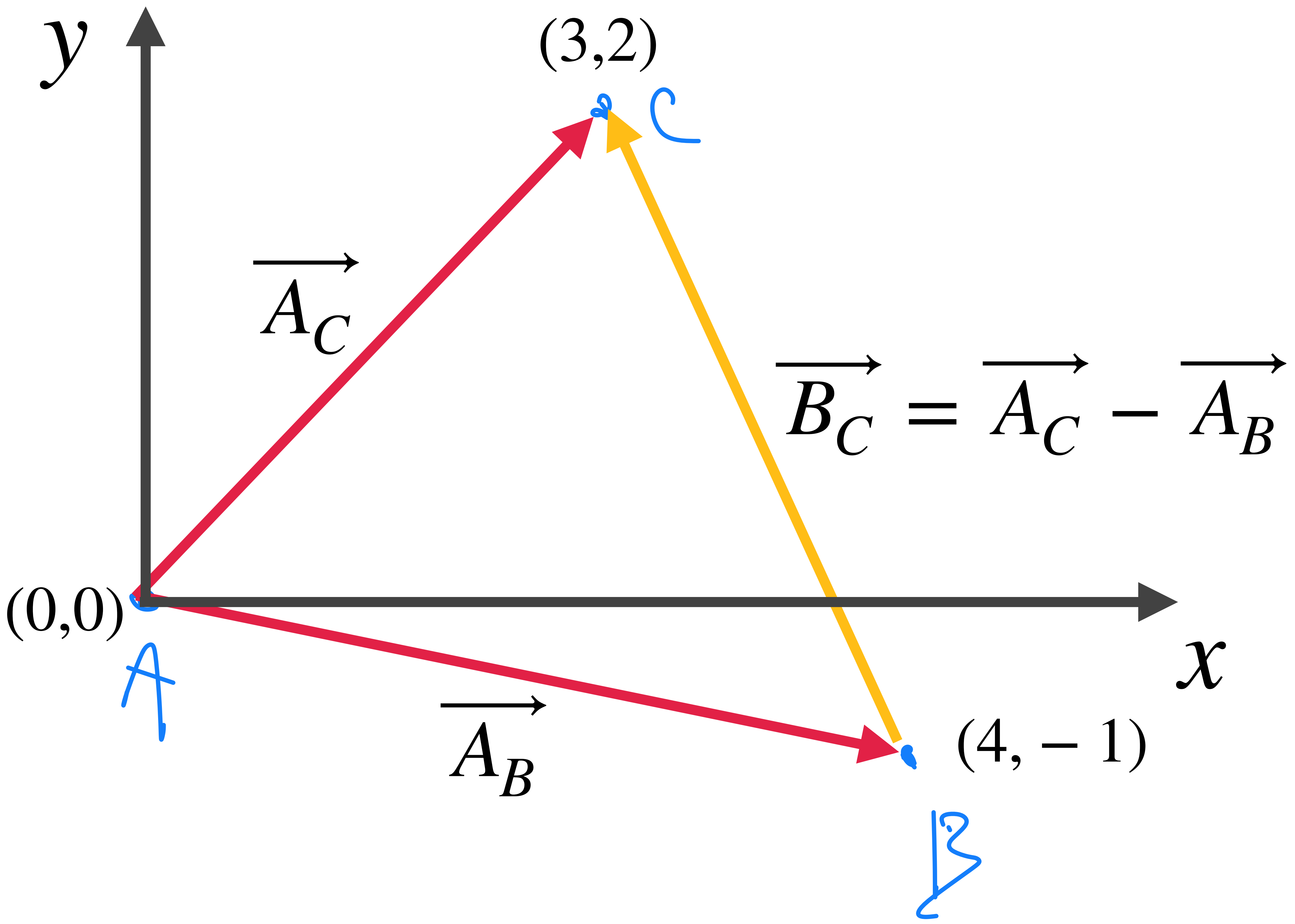
Está implícito que o segundo ponto usado para definir o vetor tem coordenadas (0,0).

Pontos e vetores

- Para encontrar a distância entre B e C explicitamente, mais dados precisam ser fornecidos.
- Por exemplo, $\|\overrightarrow{A_C}\|$, $\|\overrightarrow{A_B}\|$ e o ângulo entre $\overrightarrow{A_C}$ e $\overrightarrow{A_B}$ são dados suficientes.
- Alternativamente, pode-se introduzir um sistema de coordenadas (x, y).

$$\overrightarrow{A_B} \doteq (4, -1)$$

$$\overrightarrow{A_C} \doteq (3,2)$$

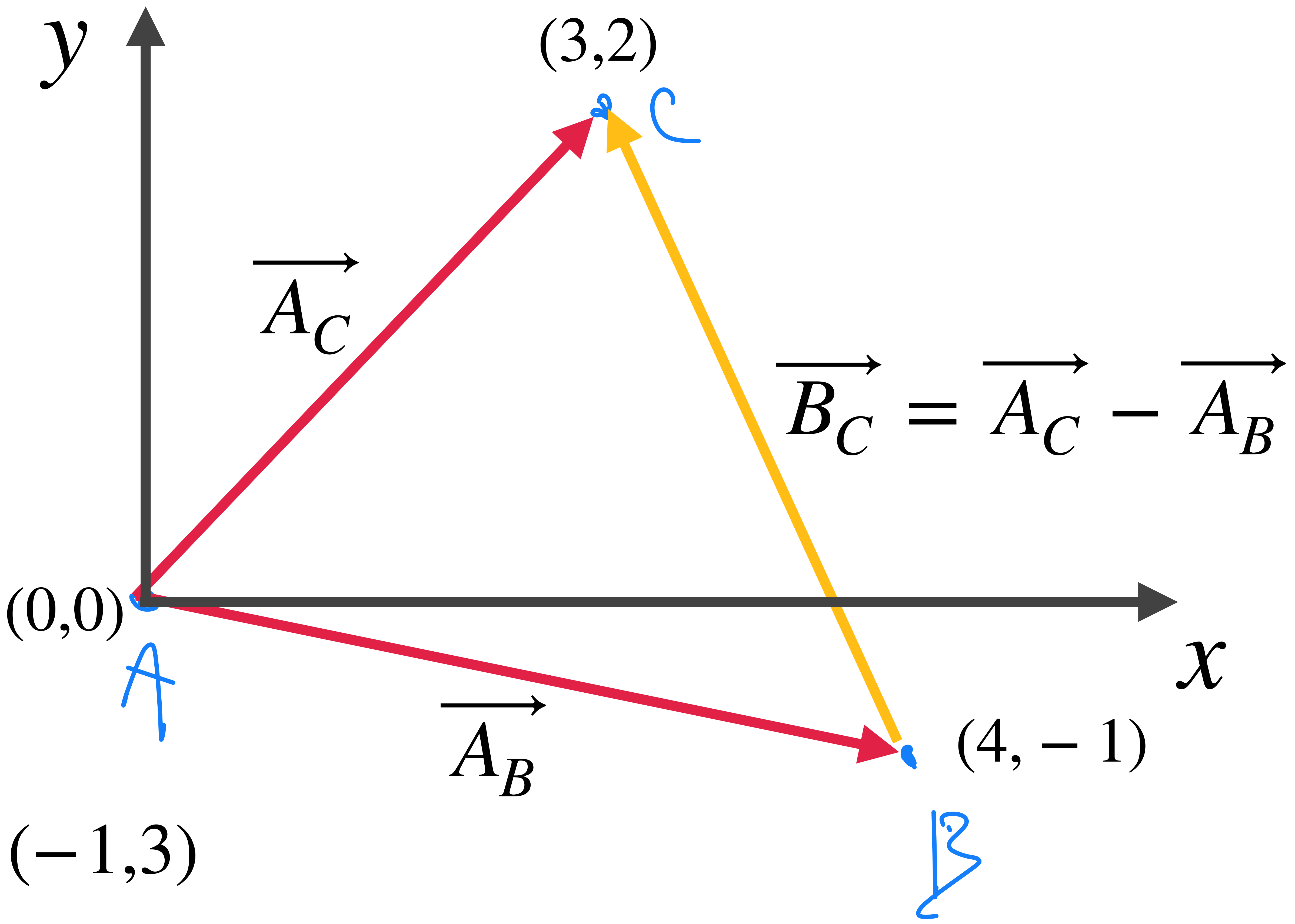


Pontos e vetores

- Para encontrar a distância entre B e C explicitamente, mais dados precisam ser fornecidos.
- Por exemplo, $\|\overrightarrow{A_C}\|$, $\|\overrightarrow{A_B}\|$ e o ângulo entre $\overrightarrow{A_C}$ e $\overrightarrow{A_B}$ são dados suficientes.
- Alternativamente, pode-se introduzir um sistema de coordenadas (x, y).

$$\overrightarrow{A_B} \doteq (4, -1)$$

$$\overrightarrow{A_C} \doteq (3,2)$$



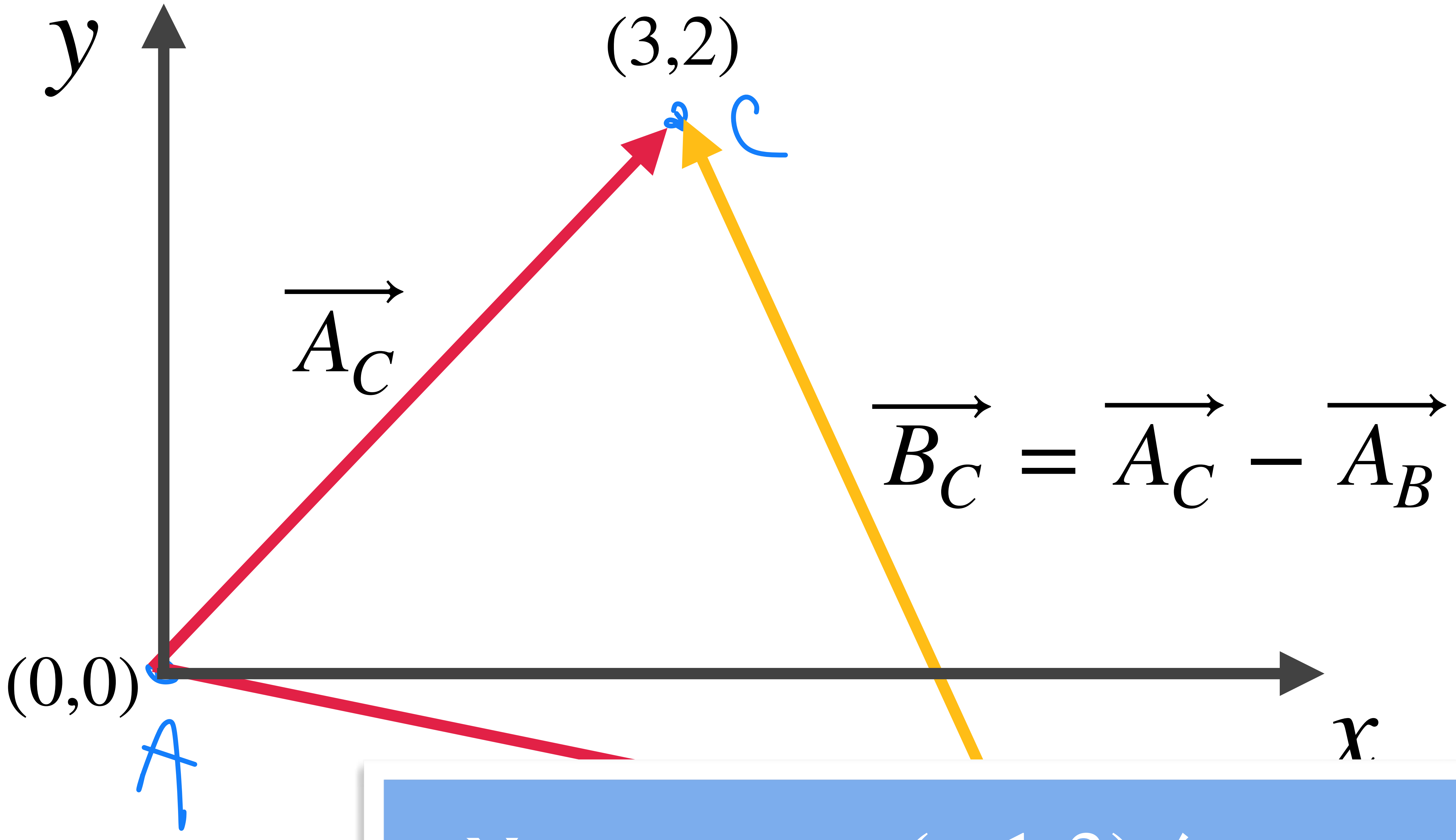
$$\therefore \overrightarrow{B_C} \doteq (3,2) - (4, -1) = (-1,3)$$

Pontos e vetores

- Para encontrar a distância entre B e C explicitamente, mais dados precisam ser fornecidos.
- Por exemplo, $\|\overrightarrow{A_C}\|$, $\|\overrightarrow{A_B}\|$ e o ângulo entre $\overrightarrow{A_C}$ e $\overrightarrow{A_B}$ são dados suficientes.
- Alternativamente, pode-se introduzir um sistema de coordenadas (x, y).

$$\overrightarrow{A_B} \doteq (4, -1)$$

$$\overrightarrow{A_C} \doteq (3,2)$$

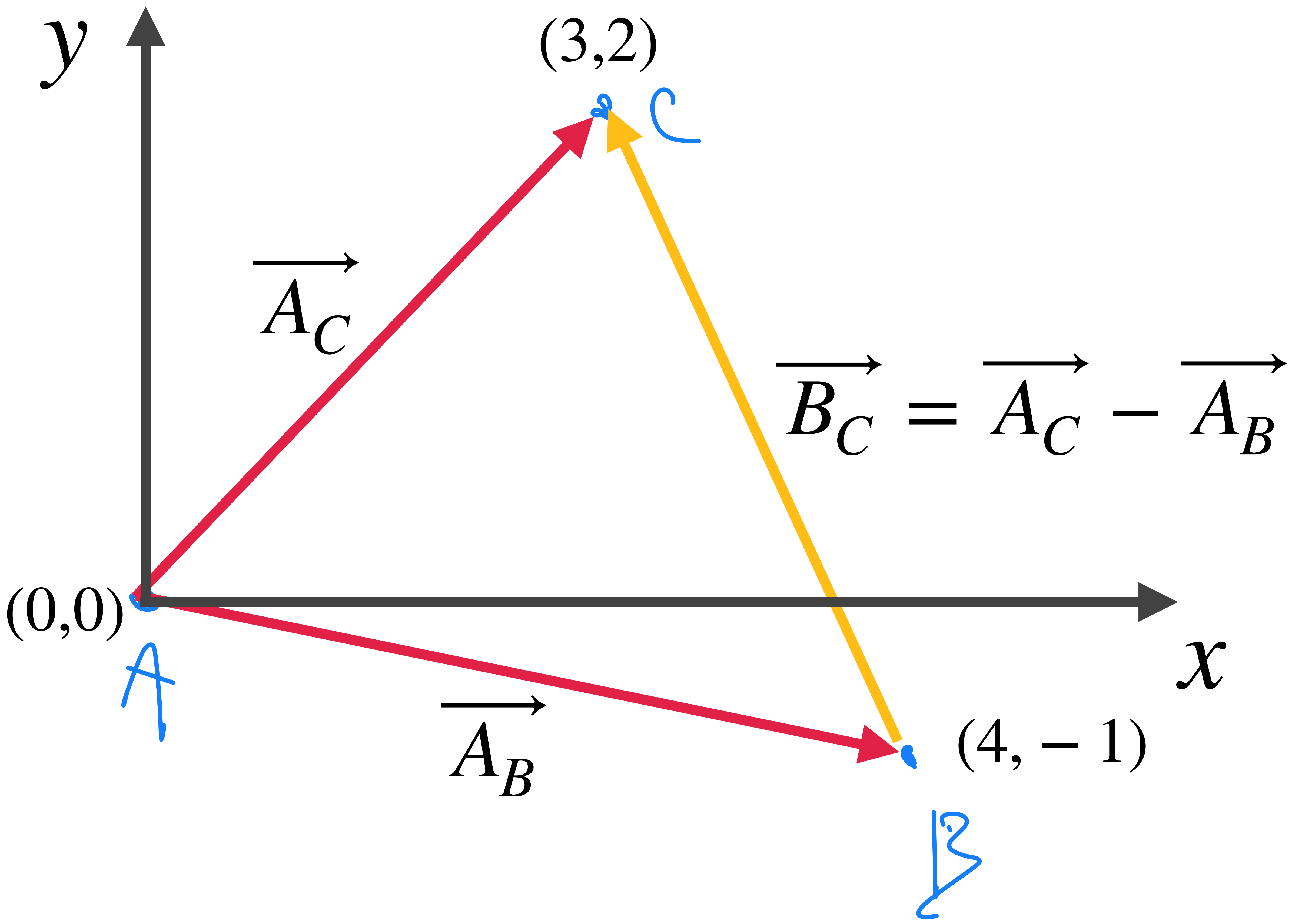


$$\therefore \overrightarrow{B_C} \doteq (3,2) - (4, -1) = (-1,3)$$

- Nota-se que $(-1,3)$ é a representação de $\overrightarrow{B_C}$ assumindo como ponto de origem $(0,0)$.

Pontos e vetores

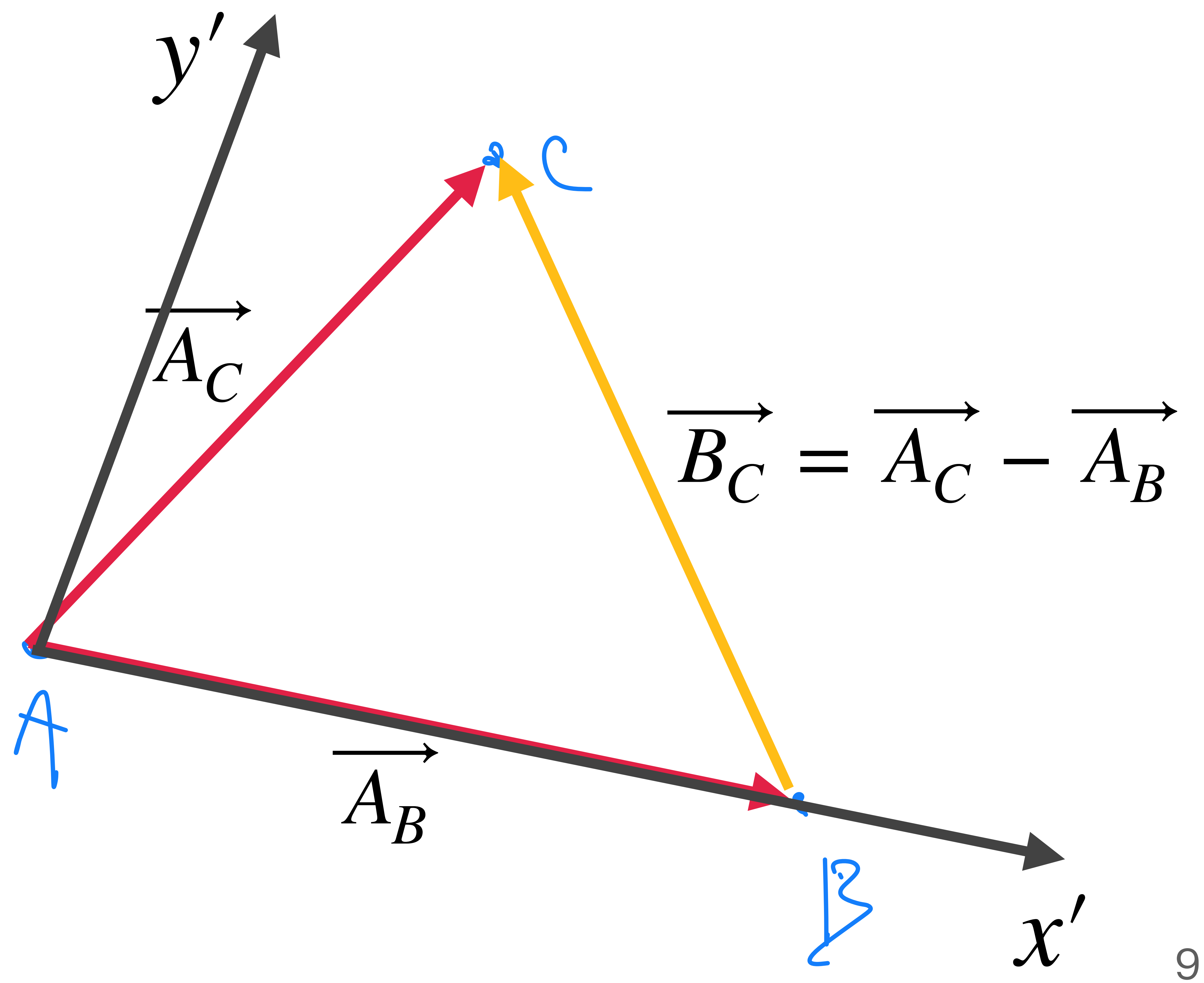
- Podemos encontrar a norma de $\overrightarrow{B_C}$ usando $\|\overrightarrow{B_C}\| = \sqrt{\overrightarrow{B_C} \cdot \overrightarrow{B_C}} = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}$.
- Acima usei que $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_x B_x + A_y B_y$.



Rotação de coordenadas

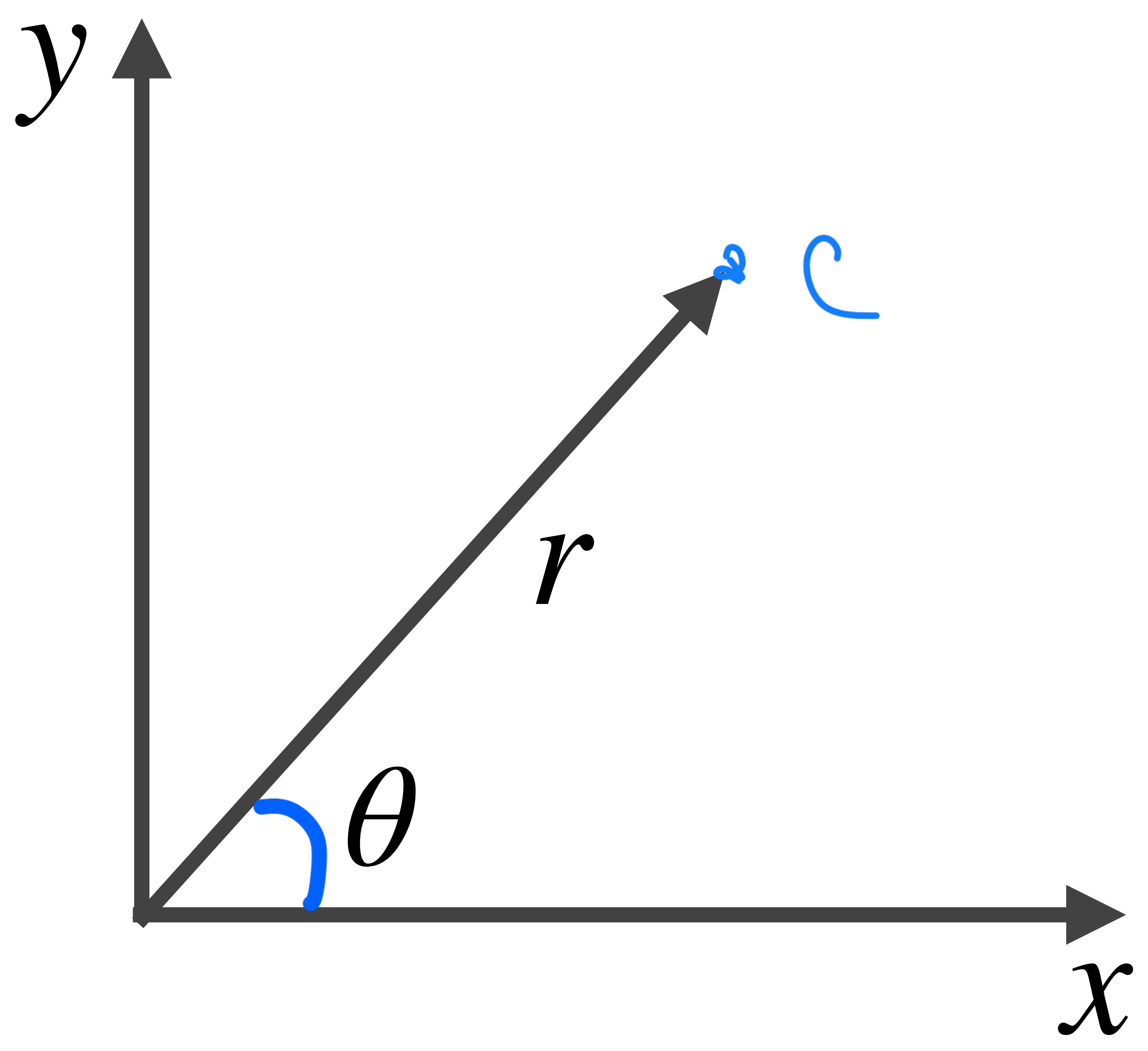
- E se outro sistema de coordenadas tivesse sido escolhido?
- O par de números que representa $\overrightarrow{B_C}$ mudaria, mas o significado geométrico de $\overrightarrow{B_C}$ não.

- **Exercício 1.1:** Verifique diretamente que $||\overrightarrow{B_C}||$ permanece inalterado se o sistema de coordenadas é rodado tal que $\overrightarrow{A_B}$ seja paralelo ao eixo-x, como na figura. Para isso, primeiro expresse $\overrightarrow{A_B}$ e $\overrightarrow{A_C}$ no novo sistema.



Coordenadas polares

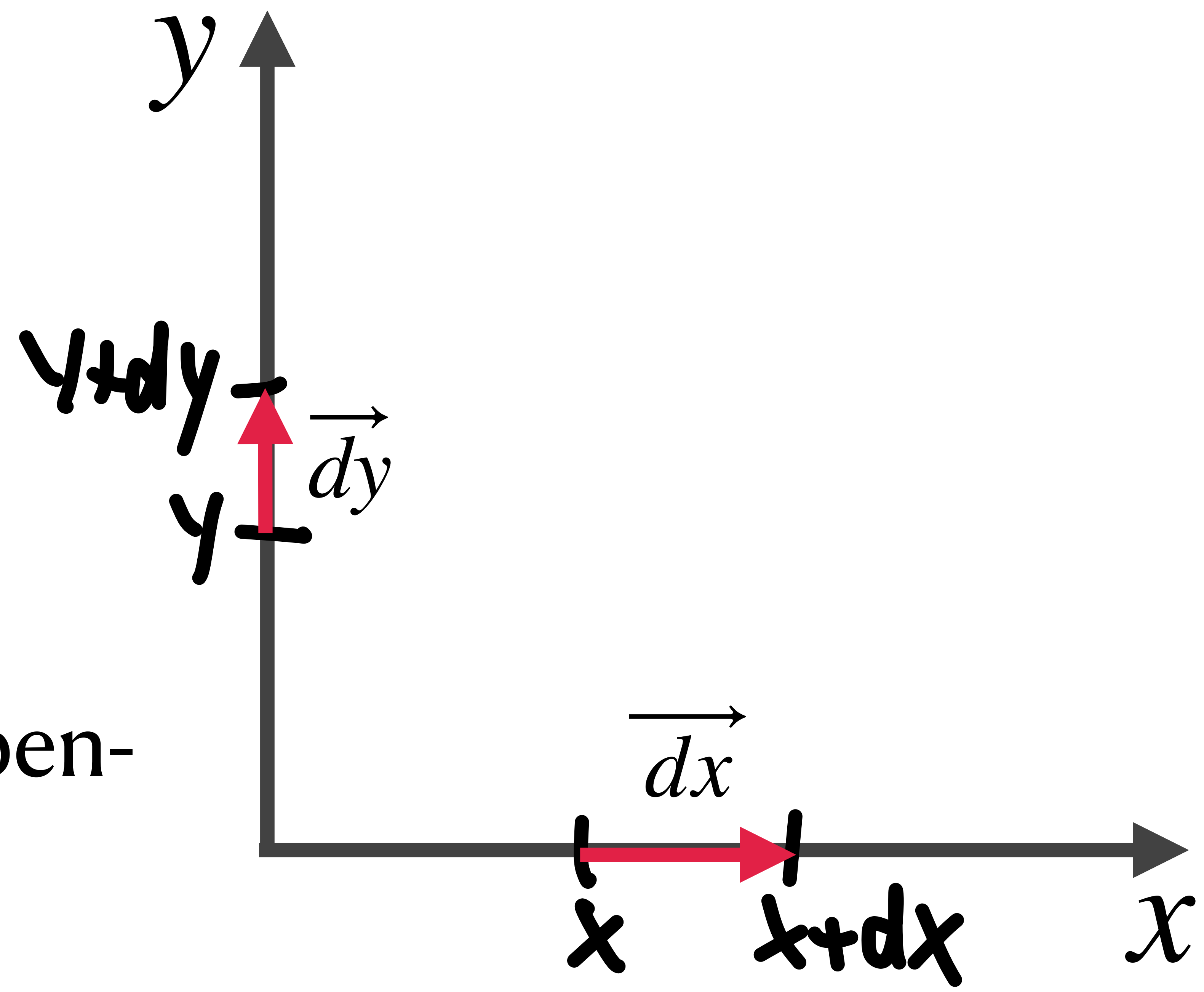
- E se coordenadas polares fossem usadas?
- A posição do ponto C era dada pelo par $(3{,}2)_{x,y}$
- Usando $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\tan\theta = y/x$ o ponto C é dado por $(\sqrt{13}, \arctan(2/3))_{r,\theta}$



- **Exercício 1.2:** Mostre explicitamente que, embora seja possível usar $\overrightarrow{A_C} \doteq (\sqrt{13}, \arctan 2/3)_{r,\theta}$, as regras que usamos para somar vetores (somando suas componentes) não se aplicam da mesma forma para esse sistema de coordenadas. Semelhantemente, o produto escalar não é dado pela expressão que usamos para as coordenadas x, y.
[ATENÇÃO: ENUNCIADO AMBÍGUO, REFAZER]

Base vetorial cartesiana

- Até agora tratamos de representações de vetores em dada base de coordenadas.
- E foi esta limitação que gerou a dificuldade com coordenadas polares.
- Vamos agora tratar de uma base vetorial, sendo possível decompor um vetor em função dela, ao invés de apenas representá-lo.
- Considere dois pontos no plano infinitesimalmente próximos, ambos com $y = 0$, um dado por x e o outro por $x + dx$.
- O vetor $\overrightarrow{dx}$ é então definido a partir desses dois pontos.
- Analogamente, podemos definir um vetor $\overrightarrow{dy}$.
- Importante: usamos um sistema de coordenadas para definir esses vetores, contudo os vetores, uma vez definidos, não dependem mais de qualquer sistema de coordenadas.



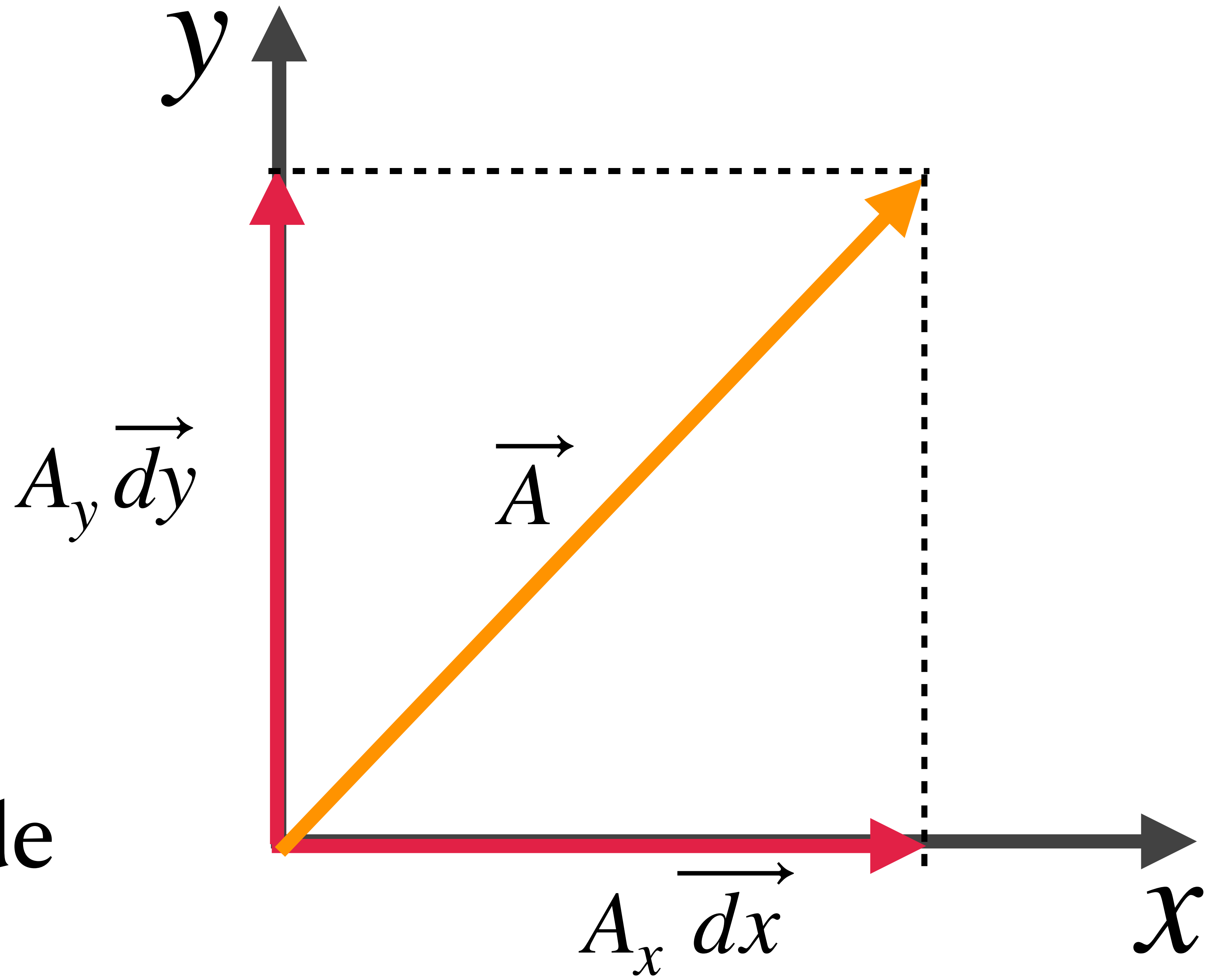
Base vetorial cartesiana

- Para um vetor $\overrightarrow{A}$ qualquer temos $\overrightarrow{A} = A_x \overrightarrow{dx} + A_y \overrightarrow{dy}$.

- Podemos também escrever $\overrightarrow{A} \doteq (A_x, A_y)_{dx,dy}$.

- Há uma grande vantagem na primeira notação: é uma igualdade (=), ela deixa explícita a relação entre as componentes $\{A_x, A_y\}$ e a base vetorial que está sendo usada $\{\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy}\}$.

- Por exemplo, se trocarmos $\overrightarrow{dx} \to 2\overrightarrow{dx}$ é imediato ver que, a fim de preservar $\overrightarrow{A}$, precisamos que $A_x \to A_x/2$.

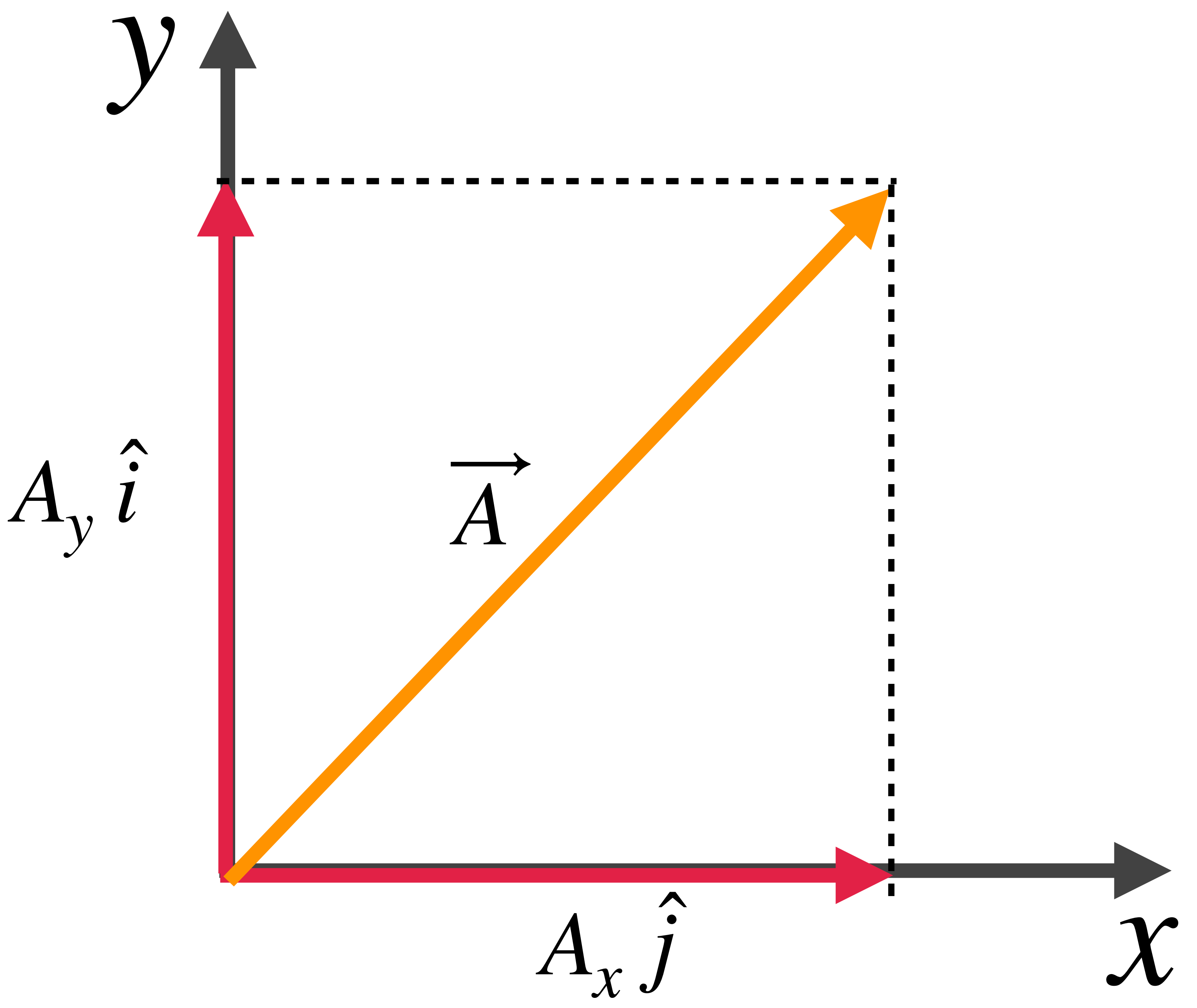


Base vetorial cartesiana

- Para tratar da norma de um vetor e de ângulos entre vetores, usa-se o produto escalar, denotado por " · " com a seguinte regra:

  $$(\cdot) : V, V \to \mathbb{R}$$

  Isto é, o produto escalar associa dois vetores a um número real. Ademais, ele é bilinear, simétrico e satisfaz $\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{dy} = 0$.



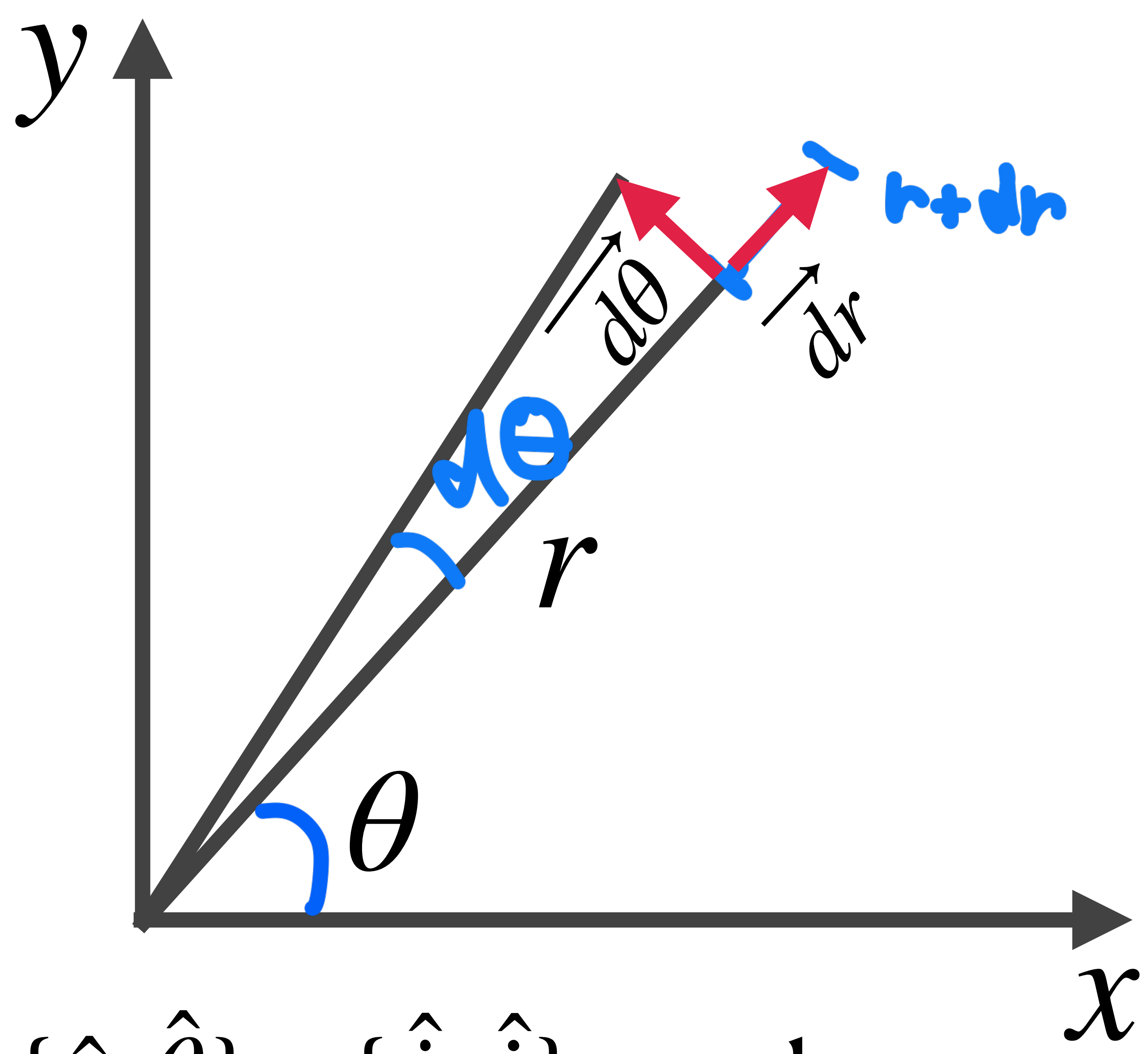
- É conveniente introduzir uma base normalizada. Essa base normalizada satisfaz: $\hat{i} \propto \overrightarrow{dx}$, $\hat{j} \propto \overrightarrow{dy}$, $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$, $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$ e $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$.

- Assim, escrevemos: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ e $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$. Usando a bilinearidade,

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= A_xB_x(\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_yB_x(\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_xB_y(\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_yB_y(\hat{j} \cdot \hat{j}) \\ &= A_xB_x + A_yB_y\end{aligned}$$

Vetores em coordenadas polares

- E para o caso de coordenadas polares?
- Podemos usar o mesmo procedimento para gerar a base vetorial.
- Para um θ qualquer, porém fixo, seleciona-se dois pontos: r e $r + dr$, estes determinam o vetor $\overrightarrow{dr}$.
- Para um r qualquer, porém fixo, seleciona-se dois pontos, dados por θ e $\theta + d\theta$, os quais determinam $\overrightarrow{d\theta}$.



- Pela geometria do problema, é fácil determinar a relação entre $\{\hat{r}, \hat{\theta}\}$ e $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$, a saber:

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} \quad \text{e} \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\,.$$

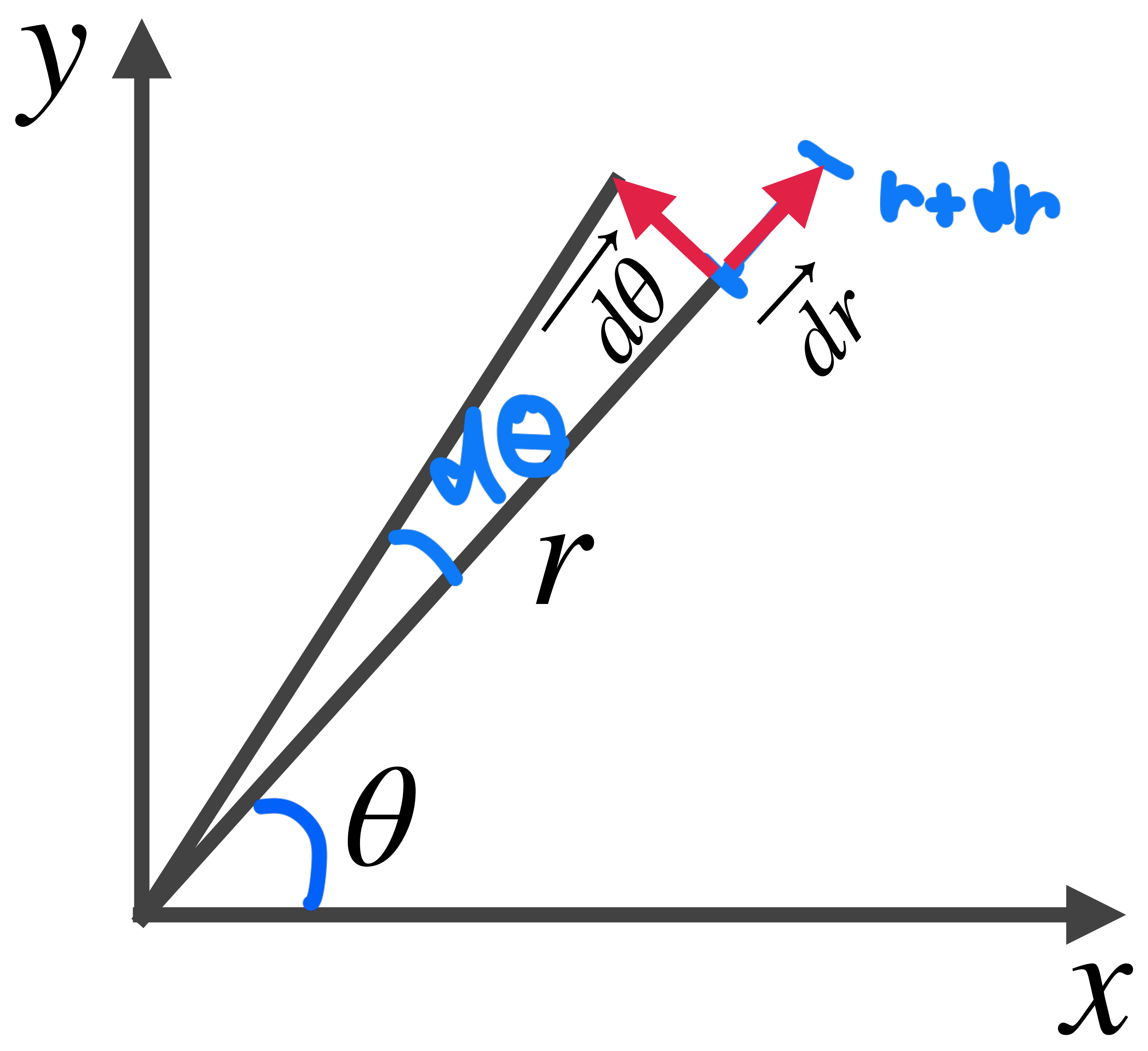
- Consequentemente, pela bilinearidade do produto escalar, temos $\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$, $\hat{\theta}\cdot\hat{\theta} = 1$ e $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$. — Verifique!

Vetores em coordenadas polares

- Entretanto, só chegamos às expressões de $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ pois a análise gráfica é particularmente simples.
- Podemos deduzir $\overrightarrow{dr}$ e $\overrightarrow{d\theta}$ com procedimentos mais gerais.
- **Exercício 1.3:** Mostre que:

$$dr = d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy\,,$$

$$d\theta = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{r}\left(\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx\right).$$



- Assim, em função da base normalizada $\{\hat{i}, \hat{j}\}$ podemos escrever os seguintes vetores:

$$\overrightarrow{dr} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} = \hat{r}\,,$$

$$\overrightarrow{d\theta} = \frac{1}{r}\left(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{i}\right) = \frac{1}{r}\hat{\theta}\,.$$ Logo, $\overrightarrow{d\theta}$ não é naturalmente normalizada.

Vetores em coordenadas polares

- Entretanto, só chegamos às expressões de $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ pois a análise gráfica é particularmente simples.

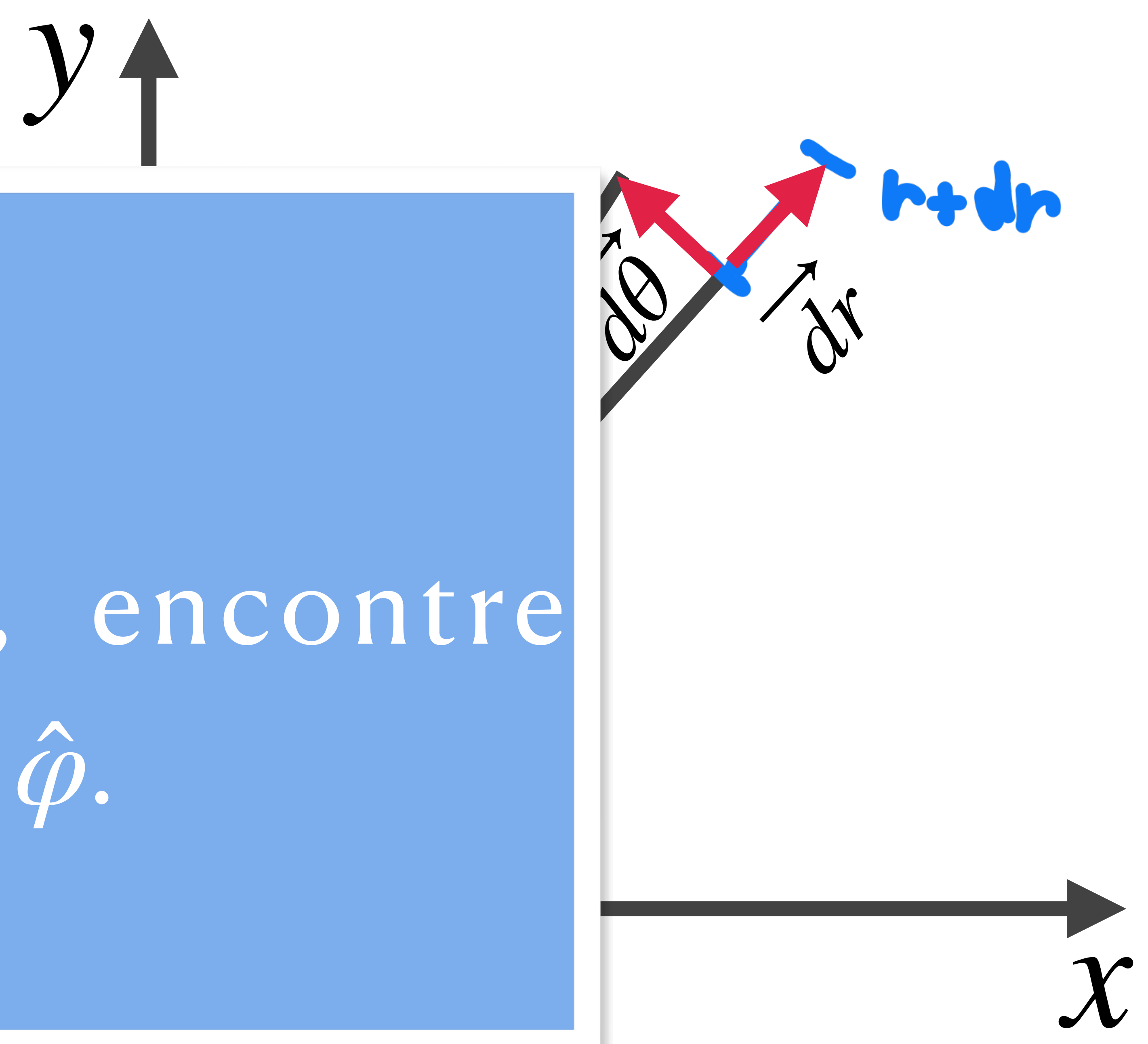
- Podemos deduzir $\vec{d}$

- **Exercício 1.3:** Most

$$dr = d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right.$$

$$d\theta = d\left(\arctan \frac{y}{x}\right.$$

Exercício 1.4:
Usando coordenadas esféricas, encontre $\overrightarrow{dr}$, $\overrightarrow{d\theta}$ e $\overrightarrow{d\varphi}$ e suas relações com $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$.



- Assim, em função da base normalizada $\{\hat{i}, \hat{j}\}$ podemos escrever os seguintes vetores:

$$\overrightarrow{dr} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} = \hat{r}\,,$$

$$\overrightarrow{d\theta} = \frac{1}{r}\left(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{i}\right) = \frac{1}{r}\hat{\theta}\,.$$ Logo, $\overrightarrow{d\theta}$ não é naturalmente normalizada.

Uma outra origem para vetores: o gradiente

- Seja $\phi(x, y)$ um campo escalar no espaço plano. Por exemplo, um campo de temperatura numa superfície, ou o potencial gravitacional da gravitação Newtoniana, ou o potencial eletrostático, ou qualquer outro escalar. A partir desse campo escalar podemos gerar um campo vetorial considerando seu gradiente, a saber:

$$\vec{\nabla}\phi = \partial_x\phi\,\hat{i} + \partial_y\phi\,\hat{j}.$$

- Tanto ϕ quando $\vec{\nabla}\phi$ têm de ser grandezas que possam ser objetivamente medidas independentemente do sistema de coordenadas adotado. Isto é, precisam ser invariantes por transformações de coordenadas.

- Em dado ponto p, podemos então escrever

$$\phi(x(p), y(p)) = \phi'(x'(p), y'(p)).$$

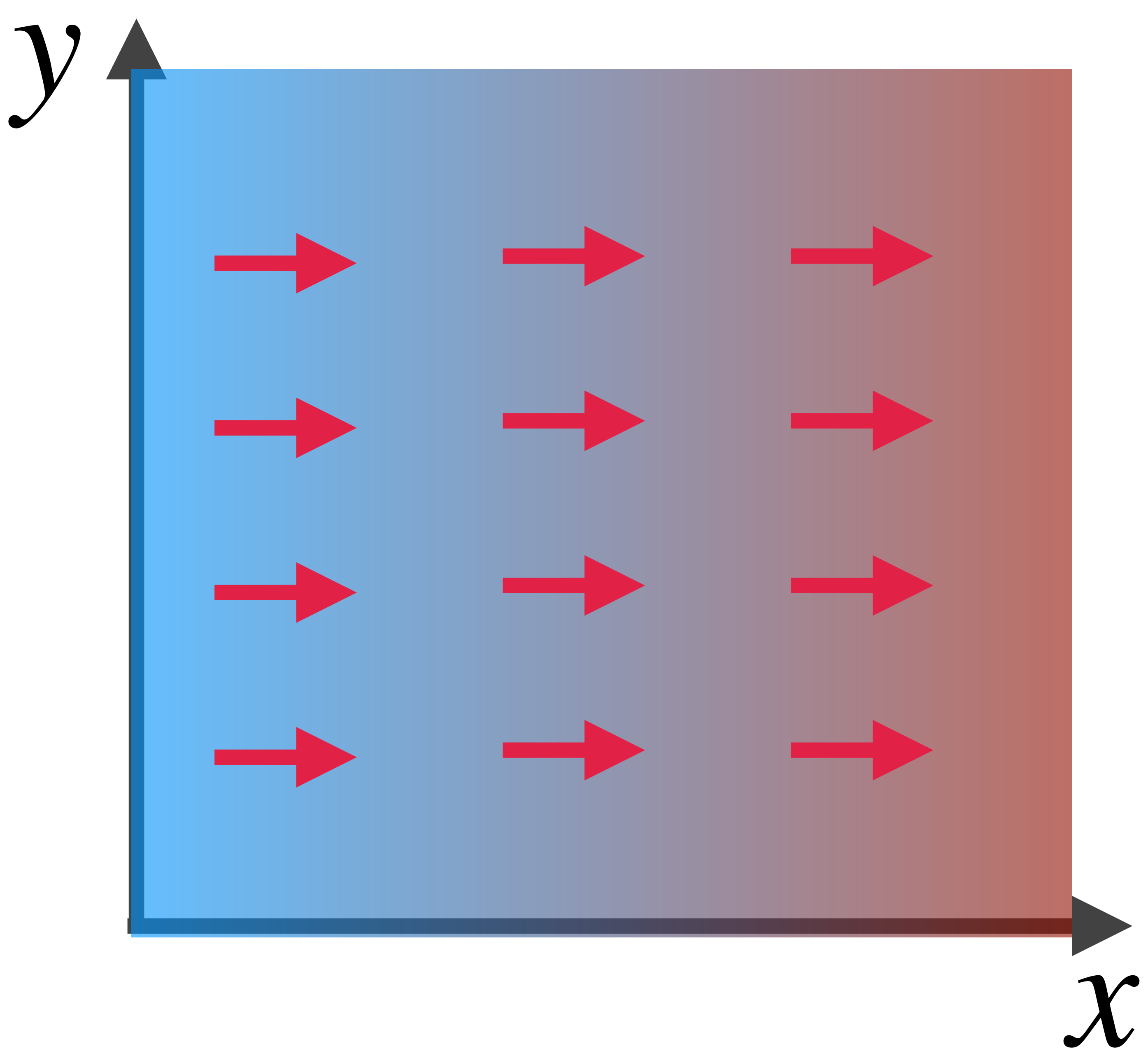


Ilustração do gradiente de $\phi(x) = x\,\phi_0 \Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \phi_0\,\hat{i}$. A região colorida ilustra os valores de ϕ (azul para vermelho). Os vetores são $\vec{\nabla}\phi$.

Uma outra origem para vetores: o gradiente

- E também podemos escrever
$$\vec{\nabla}\phi(x(p), y(p)) = (\vec{\nabla}\phi)'(x'(p), y'(p)).$$
- Alguns esclarecimentos:
  - $x(p)$ é o valor da coordenada x do ponto p.
  - As "linhas" acima simbolizam mudanças devido à transformação de coordenadas.
  - x' e y' podem ser quaisquer coordenadas, não necessariamente cartesianas.
- Exemplo simples: Sejam $\phi(x, y) = x$, $x' = 2x + 3$ e $y' = y$. Como $\phi(p) = \phi'(p)$, vemos que $\phi'(x', y') = \dfrac{x' - 3}{2}$. Verifique explicitamente para o caso dos pontos $(1,1)_{x,y}$ e $(2,4)_{x,y}$.

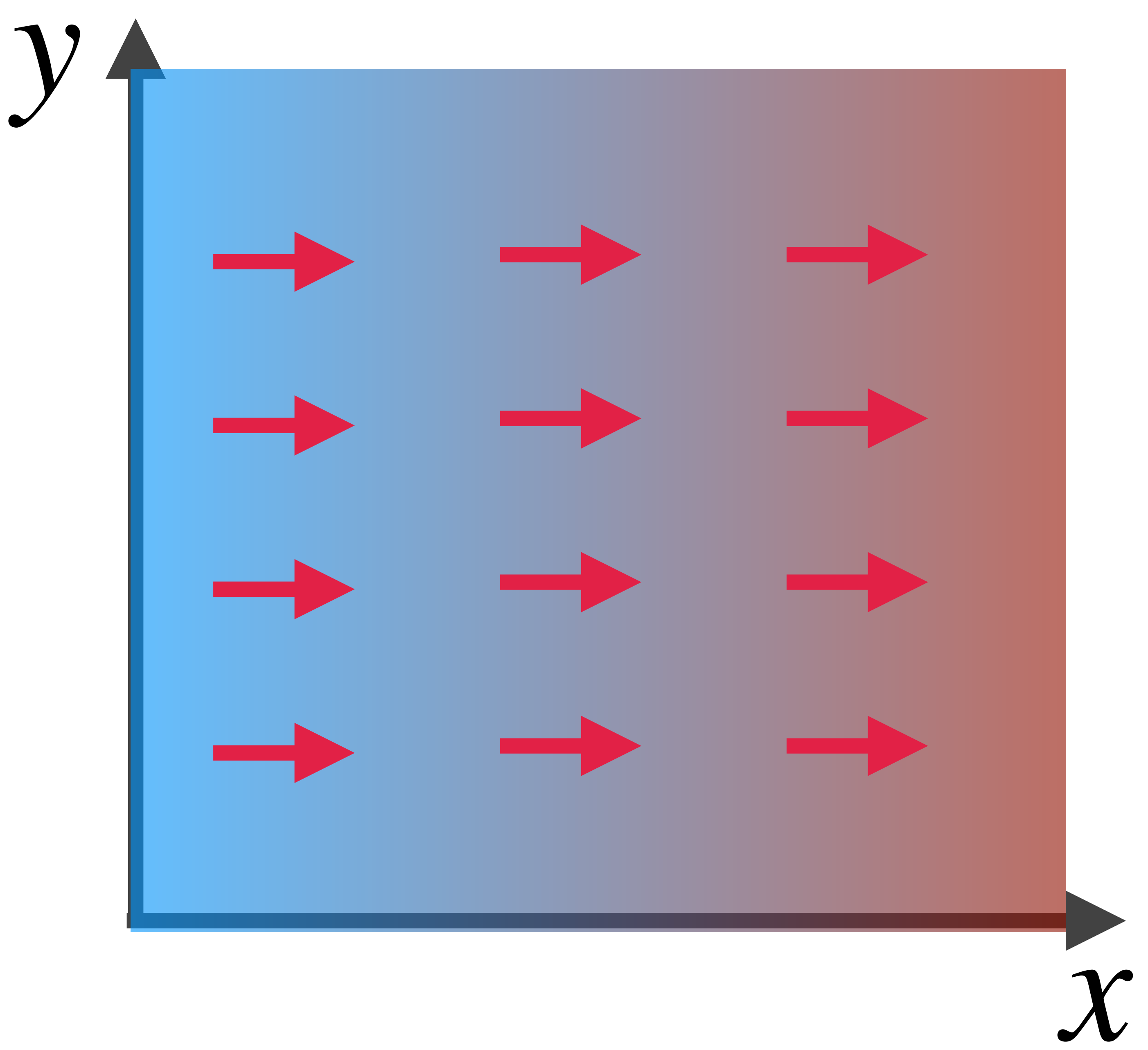


Ilustração do gradiente de $\phi(x) = x\,\phi_0 \Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \phi_0\,\hat{i}$. A região colorida ilustra os valores de ϕ (azul para vermelho). Os vetores são $\vec{\nabla}\phi$.

Derivadas e mudanças de coordenadas

- Devido à mudança de coordenadas, as derivadas parciais em $\vec{\nabla}$ precisam ser transformadas. Em particular, pela regra da cadeia,

$$\partial_x = \frac{\partial x'}{\partial x}\partial_{x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\partial_{y'} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial x'^j}{\partial x^1}\partial'_j\,.$$

- É bom lembrar que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x'}dx' + \frac{\partial x}{\partial y'}dy' = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial x^1}{\partial x'^j}dx'^j\,.$$

Para preparar a notação para qualquer dimensão, vamos usar a seguinte notação:

$$x^1 = x, \qquad x'^1 = x',$$

$$x^2 = y, \qquad x'^2 = y',$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'^i}\,.$$

A posição do índice, embaixo ou em cima, indica como a grandeza se transforma: dx^i se transforma de forma inversa a ∂_i.

Uma base compatível com $\overrightarrow{\nabla}\phi$ invariante

- De forma geral, vamos escrever

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \partial_1\phi\,\overrightarrow{e^1} + \partial_2\phi\,\overrightarrow{e^2} = \sum_i \partial_i\phi\,\overrightarrow{e^i}.$$

- Estamos a partir de agora usando x^i para um sistema qualquer de coordenadas (não precisa ser o cartesiano).

- $\overrightarrow{e^1}$ e $\overrightarrow{e^2}$ são dois elementos de base vetorial em um sistema de coordenadas arbitrário. Eles são tais que, *para um sistema de coordenadas cartesiano,*

$$\overrightarrow{e^1} = \hat{i} \text{ e } \overrightarrow{e^2} = \hat{j}.$$

- Em geral, $\overrightarrow{e^1}$ e $\overrightarrow{e^2}$ não são normalizados.

Para preparar a notação para qualquer dimensão, vamos usar a seguinte notação:

$$x^1 = x, \qquad x'^1 = x',$$

$$x^2 = y, \qquad x'^2 = y',$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'^i}.$$

x e y, assim como x^i, denotam agora um sistema de coordenadas qualquer.

Só será o cartesiano quando especificado.

Uma base compatível com $\vec{\nabla}\phi$ invariante

- A fim de que
$$\vec{\nabla}\phi = \sum_i \partial_i \phi \, \vec{e^i}$$
seja invariante, precisamos que $\vec{e^i}$ se transforme de forma inversa a $\partial_i \phi$.

- Ou seja, $\vec{e^i}$ tem de se transformar tal qual o vetor $\vec{dx^i}$:
$$\partial_i' \phi'(x', y') = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \partial_j \phi(x, y) \, ,$$
$$\vec{e'^i}(x', y') = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \vec{e^j}(x, y) \, .$$

- **Exercício 1.5:** Verifique diretamente que $\vec{\nabla}\phi$ é invariante perante as transformações acima.

Para fazer o exercício 5, é relevante notar que
$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j \equiv \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \, . \end{cases}$$

δ^j_i é chamada de delta de Kronecker.

Note que, pela relação acima, é necessário que um índice seja em cima e outro embaixo, de forma a identificar que esse símbolo se transforme tal como $\partial x^i / \partial x^j$.

Duas bases vetoriais?

- A última afirmativa nos leva à seguinte conclusão:

$$\vec{\nabla}\phi = \sum_i \partial_i \phi \, \overrightarrow{e^i} \,,$$

$$\vec{A} = \sum_i A^i \vec{e_i} \,.$$

- Ao usar coordenadas cartesianas, temos a estrutura usual com $\overrightarrow{e^1} = \vec{e_1} = \hat{i}$ e $\overrightarrow{e^2} = \vec{e_2} = \hat{j}$, mas ao transformarmos essas coordenadas,

$$\overrightarrow{e^i} \text{ se transforma como } dx^i \text{ e } \vec{e_i} \text{ se transforma como } \partial_i \,.$$

- Alguns livros sequer fazem uma distinção entre a base $\overrightarrow{e^i}$ (ou $\vec{e_i}$) de dx^i (ou ∂_i) (e.g., Wald).
- Assim, ao tratarmos em detalhes as transformações infinitesimais de coordenadas, nos deparamos com **dois espaços vetoriais**!
- A próxima parte ajudará a entender a relação entre esses espaços.

Construção explícita para a base $\vec{e_i}$

- Seja $\{x^i\}$ certo conjunto de coordenadas (não necessariamente cartesianas).
- E seja $\{\phi_{(i)}\}$ um conjunto de campos escalares (o índice com parênteses usei para explicitar que não é um campo vetorial, é apenas um conjunto de campos escalares indexados por i), com $\phi_{(i)} \propto x^i$.
- Por exemplo, em coordenadas cartesianas: $\phi_{(1)} = x$ e $\phi_{(2)} = y$ (essas igualdades podem ser usadas para definir um campo escalar em dado sistema de coordenadas; feita a definição, o campo escalar pode ser entendido independentemente de qualquer sistema de coordenadas).
- A base é data por

$$\vec{e_i} = \vec{\nabla}\phi_{(i)} \, ,$$

com a condição de normalização $\vec{e_1} = \hat{i}$ e $\vec{e_2} = \hat{j}$ no sistema de coordenadas cartesiano.

- Assim, temos

$$\vec{A} = \sum_i A^i \vec{e_i} = \sum_i A^i \vec{\nabla}\phi_{(i)} \, .$$

Exercícios

- **Exercício 1.6**: Considere $\phi(x, y) = kx$, em que k é uma constante e x, y são coordenadas cartesianas. Pede-se: i) encontre $\vec{\nabla}\phi$ em coordenadas cartesianas. ii) expresse $\vec{\nabla}\phi$ em coordenadas polares usando a base ortonormal usual $\{\hat{r}, \hat{\theta}\}$. iii) Encontre a base $\{\overrightarrow{e^r}, \overrightarrow{e^\theta}\}$ (ou $\{\overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e^2}\}$). Esta base é chamada de **base coordenada**, pois é diretamente induzida da transformação de coordenadas, não sendo normalizada em geral. iv) Na base coordenada, encontre as componentes de $\vec{\nabla}\phi$ em coordenadas polares (há mais de uma forma de fazer isso, mas o mais importante neste momento é encontrar a resposta através da transformação de $\partial_i\phi$). v) Compare as respostas dos itens ii e iv.

Exercícios

- **Exercício 1.7**: Considere a base vetorial cartesiana usual no plano, $\{\hat{i}, \hat{j}\}$ e considere a atuação de uma rotação de coordenadas. Encontre a base coordenada devido à rotação de $\{\hat{i}, \hat{j}\}$ de um ângulo θ arbitrário.

- **Exercício 1.8**: Considere $\phi(x, y) = k(x + y)$, em que k é uma constante e x, y são coordenadas cartesianas. Pede-se: i) encontre $\vec{\nabla}\phi$ em coordenadas cartesianas. ii) Rode o sistema de coordenadas, usando explicitamente as transformações de coordenadas das componentes e da base vetorial, e encontre $\vec{\nabla}\phi$ em uma nova base cartesiana tal que, no novo sistema, $\vec{\nabla}\phi \propto \hat{i}$.

- **Exercício 1.9**: Sabemos como expressar o operador $\vec{\nabla}$ em coordenadas cartesianas. Encontre as componentes desse operador em coordenadas polares para a base $\{\vec{e^r}, \vec{e^\theta}\}$ e, em seguida, considere a base normalizada $\{\hat{r}, \hat{\theta}\}$.

Parte 2
Espaço vetorial, espaço dual e métrica

Introdução

- Na última parte chegamos próximos da notação tensorial, mas ao invés de formalizar e concluí-la agora, é melhor primeiro formalizarmos conceitos mais abrangentes, os quais ajudam a entender a estrutura geral.
- Eu acho que em álgebra linear vocês já devem ter visto a definição geral de espaço vetorial (também chamado de espaço linear). Seja como for, vamos revisar brevemente.
- Os vetores que conhecemos no espaço euclidiano são exemplos de elementos desse espaço vetorial geral da álgebra linear, contudo esse espaço é bem mais amplo.
- Veremos que associado a qualquer espaço vetorial há um espaço dual. Enquanto os elementos do primeiro são chamados de vetores, os elementos do segundo são covetores.
- Veremos também que a relação entre índice em cima e índice embaixo (tal como introduzimos na última parte) é um caso particular da relação entre vetores e covetores.
- Vetores no espaço euclidiano denotamos usando uma setinha ($\vec{a}$). Para vetores de um espaço vetorial geral, vamos usar uma notação especial (um “ket"): $|a\rangle$.

Espaço vetorial (com corpo real)

- **Definição:** Sejam $|a\rangle, |b\rangle$ elementos quaisquer de um espaço V. E sejam α, β dois números reais quaisquer. V é espaço vetorial se satisfizer:

1. Existe uma operação chamada soma que é simétrica, associativa e $|a\rangle + |b\rangle \in V$.
2. Existe um vetor chamado nulo, $|0\rangle \in V$, que satisfaz $|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$.
3. Existe um vetor $|-a\rangle \in V$ que satisfaz $|a\rangle + |-a\rangle = |0\rangle$. É conveniente usar a notação $|-a\rangle \equiv -|a\rangle$. Nota: "$\equiv$" é igualdade por definição.
4. Existe um produto entre números e vetores, em que $1|a\rangle = |a\rangle$ e $\alpha|a\rangle \equiv |\alpha a\rangle \in V$. Este produto também satisfaz as seguintes propriedades: $(\alpha\beta)|a\rangle = \alpha(\beta|a\rangle)$, $\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$ e $(\alpha + \beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$.

Para maiores detalhes, sugestões de leitura: Hassani e Shapiro.

Exemplos simples de espaço vetorial

- Para este assunto ficar um pouco menos abstrato, vejamos *exemplos de espaço vetorial*:

  1. Os números reais, *munidos das operações usuais de multiplicação e adição**.
  2. Um conjunto ordenado de n números reais, ou seja, o $\mathbb{R}^n$.
  3. Vetores num espaço euclidiano de dimensão arbitrária ($\mathbb{E}^n$).
  4. Espaço das matrizes reais $N \times M$.
  5. Espaço dos polinômios de grau até n.
  6. Espaço das funções diferenciáveis de classe C^n (com domínio limitado a um dado intervalo, ou domínio ilimitado).

*Esta observação vale para todos os casos abaixo, embora não esteja explícita.

- **Exercício 2.1:** Apresente 3 modificações distintas dos exemplos acima tais que esses espaços deixem de ser espaços vetoriais. Incluir breve justificativa. Em princípio este é um exercício simples que requer um entendimento básico da definição de espaço vetorial.

Funcionais lineares

- Seja T uma transformação linear com $T: V \to \mathbb{R}$. Devido ao espaço de destino ser o dos números reais, esta transformação linear é chamada de funcional linear.

- Exemplo trivial: Seja V o espaço $\mathbb{R}$, assim um possível exemplo para T é uma mera multiplicação por um número real. Nesse caso trivial, seja $|a\rangle = 5$ e T multiplica por 3. Assim, $T|a\rangle = 15$.

- Um pouco menos trivial: Seja V o espaço mas matrizes 3×1, a assim a atuação de T pode ser a atuação de uma matriz 1×3. Seja o ket $|a\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e T representaria a atuação de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, logo $T|a\rangle = 16$.

- De forma mais próxima da Parte 1: Seja V o espaço $\mathbb{E}^2$, $|a\rangle = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ e T a atuação de $\hat{j}\,\cdot$, logo $T|a\rangle = 3$.

Funcionais lineares

- Os exemplos anteriores satisfazem que $T : V \to \mathbb{R}$ e também que é linear. Dizer que T é linear quer dizer que
$$T(|a\rangle + \beta|b\rangle) = T|a\rangle + \beta T|b\rangle.$$
- Seja V^* (*lê-se V dual*) o espaço de todos os funcionais lineares que atuam em V. Mostra-se que V^* **é um espaço vetorial**.
- **Exercício 2.2**: Demonstre a afirmativa acima. — Na verdade é fácil demonstrar isso, mas provavelmente só os alunos com mais inclinação matemática terão interesse. Sugestão: ver o livro do Hassani, seção 2.3 (*Linear Maps*) (ou diversas outras fontes).
- Para ilustrar que V^* é também espaço vetorial, note que os exemplos anteriores para T podem ser facilmente entendidos como elementos de espaços vetoriais.
- A partir de agora, denotaremos os elementos de V^* com um "bra": $\langle a| \in V^*$.
- Assim, a atuação de um bra $\langle a|$ sobre um ket $|b\rangle$ leva a $\langle a|(|b\rangle) \equiv \langle a|b\rangle \in \mathbb{R}$.

Bras, kets e bases vetoriais

- Lembremos que encontramos dois tipos de representações de vetores:
  - $\vec{A} = \sum_i A^i \vec{e_i}$, em que $\vec{e_i}$ se transforma tal como $\vec{\nabla} \phi_{(i)}$,
  - $\vec{B} = \sum_i B_i \vec{e^i}$, em que $\vec{e^i}$ se transforma tal como $\overrightarrow{dx^i}$.
- Vetores cujas componentes têm índice embaixo (B_i) são chamados covariantes.
- Vetores cujas componentes têm índice em cima (A^i) são chamados contravariantes.

- Em princípio, um vetor ou é do tipo covariante ou é do tipo contravariante. Vetores covariantes aparecem naturalmente através do gradiente de um escalar. Vetores definidos a partir de posição de pontos (vetor posição, assim como sua derivada, o vetor velocidade) são contravariantes. Em todos esses casos, eles podem ser vistos como "setinhas" no espaço, mas *a forma com que suas componentes mudam é diferente*. Em particular, ***grandezas escalares só podem surgir da combinação de um covariante com um contravariante***.

Bras, kets e bases vetoriais

- Ao tratarmos da derivada direcional, fizemos a combinação das componentes de um vetor contravariante com um covariante: $\nabla_{\vec{A}}\phi = \sum_i \partial_i\phi\, A^i$, assim combinando as componentes de $\vec{A}$ com as de $\vec{\nabla}\phi$.
- Podemos entender que a atuação de $\partial_i\phi$ sobre A^i gera um escalar.
- Assim, associando $\vec{A}$ aos kets, teríamos que $\vec{\nabla}\phi$ seria um bra e podemos escrever
$$\langle \nabla\phi | A\rangle = \sum_i \partial_i\phi\, A^i\,.$$
- Ou, de forma mais geral, para um vetor covariante arbitrário $\vec{B}$,
$$\langle B | A\rangle = \sum_i B_i\, A^i\,.$$
- É importante notar que $\langle B|A\rangle$ é invariante por transformações de coordenadas. **Exercício 2.3**: Verifique isso. A demonstração é bem semelhante à do exercício 1.5.

Bras, kets e bases vetoriais

- A partir de uma base qualquer no espaço vetorial V , denotada por $\{|e_i\rangle\}$, podemos construir uma base de V^* a partir de
$$\langle e^j | e_i \rangle = \delta^j_i \,.$$
- A demonstração da existência dessa base de V^* é simples, mas vamos apenas usar esse resultado: a base de V induz uma base em V^* com a mesma dimensão, ou seja, $\dim V = \dim V^*$.
- Exemplos:
  - Seja $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a base de V. A base dual correspondente é $\{(1 \quad 0), (0 \quad 1)\}$.
  - Seja $\{\hat{i}, \hat{j}\}$ a base de V. A base dual correspondente é $\{\hat{i}\,\cdot\,, \hat{j}\cdot\}$.
  - Para $\{x, y\}$ (espaço das combinações lineares de x e y), base dual correspondente é $\{\partial_x, \partial_y\}$.

Bras, kets e bases vetoriais

- Expressando em função de uma base,

$$|A\rangle = \sum A^i |e_i\rangle \quad \text{e} \quad \langle B| = \sum B_i \langle e^i|.$$

- Usando essas bases, temos

$$\langle B|A\rangle = \sum_{ij} B_i A^j \langle e^i | e_j\rangle = \sum_{ij} B_i A^j \delta^i_j = \sum_i B_i A^i,$$

que é condizente com o que já tínhamos, independente da base: $\langle B|A\rangle = \sum_i B_i\, A^i$.

Produto interno

- O produto interno é uma generalização do produto escalar. Veremos em breve que toda métrica determina um produto interno.
- É a partir de um produto interno que podemos mapear cada ket num bra correspondente (equivalentemente, o produto interno permite "abaixar índices”).
- Definição de produto interno (,):
  - $(\ , \ ) : V \times V \to \mathbb{R}$. Isto é, $(|a\rangle, |b\rangle) \in \mathbb{R}$.
  - É simétrico. Isto é, $(|a\rangle, |b\rangle) = (|b\rangle, |a\rangle)$.
  - É bilinear. Por exemplo: $(|a\rangle, |b\rangle + \alpha |c\rangle) = (|a\rangle, |b\rangle) + \alpha(|a\rangle, |c\rangle)$.
  - É não degenerado: Se $(|a\rangle, |b\rangle) = 0 \ \ \forall |b\rangle$, então $|a\rangle = |0\rangle$.
- Em acordo com nossa construção, o resultado do produto interno é independente do sistema de coordenadas, assim como qualquer ket e qualquer bra são independentes.

Produto interno

Geometricamente o que o produto interno acrescenta?

Ele dá base para os seguintes conceitos:
1 - Distâncias, tamanhos.
2 - Ângulos.

Em $\mathbb{E}^2$, usando o produto escalar podemos tratar do tamanho de um vetor: $||\overrightarrow{A}|| = \sqrt{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A}}$. O que pode também ser usado para medir a distância entre dois pontos.

Ângulo entre vetores é dado por $\cos(\theta) = \dfrac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{||\overrightarrow{A}|| \, ||\overrightarrow{B}||}$.

sistema de coordenadas, assim como qualquer ket e qualquer bra são independentes.

Produto interno

- Observa-se que $(|a\rangle, \ ) : V \to \mathbb{R}$. Logo $(|a\rangle, \ ) \in V^*$. (!!)
- Agora, para qualquer ket, podemos encontrar um bra correspondente:

$$\langle a| = (|a\rangle, \ ).$$

- $$(|a\rangle, |b\rangle) = \langle a| \, |b\rangle = \langle a|b\rangle$$

Produto interno entre dois kets.

Atuação de um bra sobre um ket.

- Para ilustrar com caso particular. No espaço euclidiano, sendo “ $\cdot$ “ o produto escalar:
  - $|A\rangle = \vec{A}$ e $|B\rangle = \vec{B}$.
  - $\langle A| = (|A\rangle, \ ) = \vec{A} \cdot \ $. —- Note o produto escalar após o vetor.
  - $(|A\rangle, |B\rangle) = \vec{A} \cdot \vec{B}$ e $\langle A|B\rangle = (\vec{A} \cdot)(\vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B}$

Produto interno e métrica

- Na notação de índices, o que significa o produto interno?
- Lembremos que fizemos as associações: $|A\rangle \leftrightarrow A^i$ e $\langle B| \leftrightarrow B_i$.
- Vimos que o produto interno associa dois vetores a um número. Esse número tem de ser independente do sistema de coordenadas. A soma $\sum A^i B^i$ não é uma possibilidade.
- **Exercício 2.4**: Demonstre a última afirmativa.
- Cada vetor contribui com um índice contravariante, logo precisamos de um objeto com dois índices covariantes. Esse novo objeto vamos escrever suas componentes como g_{ij} , ou seja, algo que tem duas componentes covariantes.
- Assim $(|A\rangle, |B\rangle) = \sum_{ij} g_{ij} A^i B^j$.
- E como g_{ij} se transformaria? Assim: $g'_{ij}(x'^1, x'^2) = \sum_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} g_{lm}(x^1, x^2)$

Produto interno e métrica

- **Exercício 2.5**: Verifique que $\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}A^iB^j$ se transforma como um escalar.

- Desta forma, especificar um produto interno é a mesma coisa que especificar, num dado sistema de coordenadas, uma matriz (g_{ij}). Essa matriz é comumente chamada de **métrica** e vamos assim chamá-la. — Mais precisamente, é a matriz que representa a métrica.

- No espaço $\mathbb{E}^2$ com coordenadas cartesianas, o produto escalar satisfaz
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^1B^1(\hat{i}\cdot\hat{i}) + A^2B^1(\hat{j}\cdot\hat{i}) + A^1B^2(\hat{i}\cdot\hat{j}) + A^2B^2(\hat{j}\cdot\hat{j}) = A^1B^1 + A^2B^2\,.$$

  Isto é equivalente a $\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{ij} A^iB^jI_{ij}$, em que I_{ij} são as componentes da matriz identidade.

  Assim, *usando coordenadas cartesianas, a métrica é a matriz identidade*.

Produto interno e métrica

- Algumas relações interessantes...
- $|A\rangle \leftrightarrow A^i$ (Lembrete: $|A\rangle = \sum A^i |e_i\rangle$, logo com "$\leftrightarrow$" estou apenas omitindo a base)
- $\langle B| \leftrightarrow B_i$
- $(\, , \,) \leftrightarrow g_{ij}$
- $(|B\rangle, |A\rangle) = \sum_{ij} B^i g_{ij} A^j$
- $(|B\rangle, \,) \leftrightarrow \sum_i B^i g_{ij}$
- $\langle B| = (|B\rangle, \;\,) \implies B_j = \sum_i B^i g_{ij}$
- $\langle B|A\rangle = \sum_i B_i A^i$

Produto interno e métrica

- Algumas relações interessantes... E de forma mais sucinta (soma nos índices repetidos).
- $|A\rangle \leftrightarrow A^i$ (Lembrete: $|A\rangle = A^i|e_i\rangle$, logo com "$\leftrightarrow$" estou apenas omitindo a base)
- $\langle B| \leftrightarrow B_i$
- $(\,,\,) \leftrightarrow g_{ij}$
- $(|B\rangle, |A\rangle) = B^i g_{ij} A^j$
- $(|B\rangle,) \leftrightarrow B^i g_{ij}$
- $\langle B| = (|B\rangle, \;\;) \implies B_j = B^i g_{ij}$
- $\langle B|A\rangle = B_i A^i$

Propriedades da métrica

- Dado que $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$, isso nos levou à introdução da métrica como objeto com dois índices covariantes: g_{ij} . (Implicitamente usamos também a bilinearidade).
- Outras duas propriedades:
  - Da simetria do produto interno temos: $g_{ij} = g_{ji}$.
  - Da não degenerescência, temos que $\det(g_{ij}) \neq 0$.
- **Exercício 2.6**: Após rever como a métrica se transforma, mostre que, se em dado sistema de coordenadas a métrica satisfaz as propriedades acima, então em qualquer outro sistema ela continuará a satisfazer essas propriedades. Dica para a segunda propriedade: a matriz de componentes $\partial x^i / \partial x'^j$, assim como $\partial x'^i / \partial x^j$, não pode ser degenerada (é uma condição mínima que toda transformação de coordenadas deve satisfazer).

Propriedades da métrica

- Como $\det(g_{ij}) \neq 0$ então a métrica possui uma inversa.

- **Exercício 2.7**: Introduzimos a delta de Kronecker mais no início do curso (δ^i_j). Ela é um objeto com um índice covariante e outro contravariante. Isso é natural pois a introduzimos a partir da relação $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$. Vimos também que essa delta ou vale 0 ou vale 1. Mostre diretamente (usando a sua transformação de coordenadas) que a delta segue assumindo os mesmos valores em qualquer sistema de coordenadas.

Propriedades da métrica

- Em componentes temos, $(g^{-1})^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ (a soma em j está implícita).
- Convenção largamente usada e que usaremos também: $g^{ij} \equiv (g^{-1})^{ij}$.
- Nota-se que (verifique essas passagens!):

$$A^i g_{ij} B^j = A^i g_{ij} \delta^j_l B^l = A^i g_{ij} g^{jk} g_{kl} B^l = A_j g^{jk} B_k \, .$$

- Produto interno não degenerado (em dimensão finita) induz um produto interno dual.
- Ou seja, a métrica pode ser usada para "baixar índices”. E a inversa da métrica pode ser usada para "levantar índices”:

$$B^i = g^{ij} B_j.$$

Breve revisão da Parte 2

- Índices contravariantes e índices covariantes estão associados a espaços vetoriais diferentes: chamados de V e V^*.
  Podemos somar $A_i + B_i$, ou $A^i + B^i$, mas não $A_i + B^i$. (perde-se o sentido geométrico)
  A atuação de A^i sobre B_i fornece o escalar $A^i B_i$. (soma em i implícita)

- Introduzir um produto interno é o mesmo que introduzir uma métrica. (em dimensão finita)
- Produtos internos fornecem as noções de tamanho/distância e ângulo/semelhança.
- Ademais, a métrica permite estabelecer um mapa entre elementos de V e V^*, ou seja, equivalentemente permite baixar e levantar índices: $A^i = g^{ij} A_j$ e $A_i = g_{ij} A^j$

- A métrica do espaço euclidiano *em coordenadas cartesianas* é uma matriz identidade.
- Com outras coordenadas ou em outros espaços, a métrica assume outras formas.

Parte 3
Tensores e notação tensorial

O que são tensores?

- O que vimos nas Partes 1 e 2 auxilia no entendimento de tensores e sua relação com geometria.
- Veremos agora a definição geral de tensores, em particular a definição padrão dada em muitos livros de física em função das componentes.

- Nesta seção, exceto quando dito ao contrário, tudo será em dimensão arbitrária (ao invés da ênfase em 2D).
- Denotaremos as coordenadas de forma coletiva por x apenas (para qualquer sistema de coordenadas). Assim $\phi(x)$, num espaço tridimensional, significa $\phi(x^1, x^2, x^3)$.
- Usaremos x' para simbolizar um outro sistema de coordenadas diferente da dado por x.

Escalares: tensores de posto zero

- Um tensor de posto zero é, por definição, um campo escalar.

- Para um dado ponto p no espaço, como vimos, $\phi(p) = \phi'(p)$.

- Ao expressar esse ponto p por meio de coordenadas, x ou x', temos

$$\phi(x) = \phi'(x').$$

Vetores: tensores de posto 1 contravariantes

- Um tensor de posto 1 contravariante é um vetor.

- As componentes $A^i(x)$ representarão um tensor se este símbolo satisfizer

$$A'^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j(x)\,.$$

Podemos também escrever a transformação inversa,

$$A^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A'^j(x')\,.$$

- *Questão*: Por que sempre podemos assumir que existe a transformação inversa?

- O vetor completo é dado pelo emprego de uma base $\{\,|e_i\rangle\}$, a saber: $|A\rangle = A^i\,|e_i\rangle\,.$
  $|A\rangle$ é invariante por transformação de coordenadas.

Digressão 1: O que é mudança de coordenadas?

- De forma geral, a questão chave é: *não gerar perda de informação*.
- Imagine que estamos descrevendo certo espaço com coordenadas $(x^1, x^2, \dots) = x$.
- $x \to x' \implies x' = x'(x)$ e $x \leftarrow x' \implies x = x(x')$.

  Ou seja, é necessário que exista $x'(x)$ e sua inversa (ao menos localmente).
- No contexto de tensores, exige-se também que $x'(x)$ e sua inversa sejam de classe C^1.
- Consequentemente, pela regra da cadeia,

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j \quad \text{e} \quad dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j\,.$$

  Logo, $\det\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$.
- Lembrete: só consideramos coordenadas independentes entre si: $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \delta^i_j\,.$

Covetores: tensores de posto 1 covariantes

- As componentes $B_i(x)$ representarão um tensor de posto 1 covariante se

$$B'_i(x') = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} B_j(x) \,.$$

- A *contração* das componentes de um covetor com um vetor $(A^i B_i)$, gera um escalar.

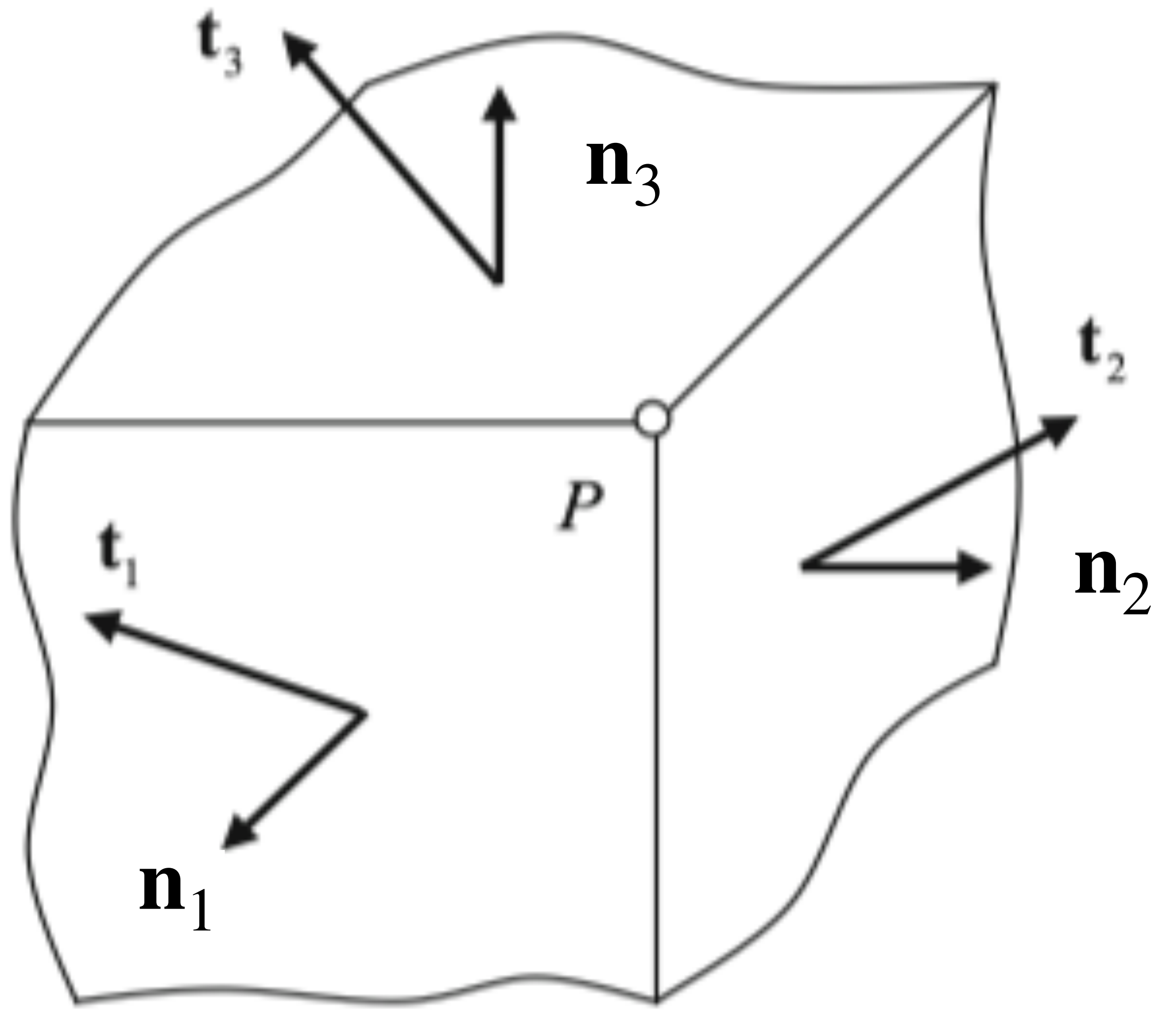
Exercício 3.1: Mostre a última afirmativa explicitamente. (Variações desse exercício já foram feitas em outros itens, apenas a forma que chegamos a isso é diferente).

- Grande parte dos problemas tensoriais em física é resolvida via componentes, sem menção explícita à base.

- Os covetores são expressos em função de outra base $\{\langle e^i |\}$, que satisfaz $\langle e^i | e_j \rangle = \delta^i_j$ e $\langle B | = B_i \langle e^i |$. Assim, temos $\langle B | A \rangle = B_i A^i$.

Digressão 2: Tensor tensão de Cauchy

- O nome "tensor" se deve ao primeiro tensor ser sobre tensão.
- Um elemento de volume de um fluido em geral tem um vetor tensão ($\mathbf{t}$) diferente em direções diferentes (simbolizadas pelos versores $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$).
- A informação completa sobre os vetores tensão, em todas as direções, e em dada base de coordenadas, pode ser condensada na matriz simétrica ($T^i{}_j$), da seguinte forma:



Irgens - Tensor Analysis.

- $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$. Isto é, dada uma direção $\mathbf{n}$, $\mathbf{T}$ atua sobre essa direção e tem como resultado um vetor (o vetor tensão $\mathbf{t}$). $\mathbf{n}$ e $\mathbf{t}$ são vetores, mas $\mathbf{T}$ não pode ser. Em componentes:

$$t^i = T^i{}_j n^j \, .$$

- Tal como demonstrado por Cauchy, a matriz dada por ($T^i{}_j$) é mais do que uma coleção de números, ela descreve uma estrutura geométrica que generaliza a noção de vetor.

Tensores de posto N

- (As componentes de) tensores de posto N contraviantes se transformam de acordo com

$$T'^{i_1 \dots i_N}(x') = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_N}}{\partial x^{j_N}} T^{j_1 \dots j_N}(x)\,.$$

- (As componentes de) tensores de posto N puramente covariantes se transformam assim

$$T'_{i_1 \dots i_N}(x') = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j_N}}{\partial x'^{i_N}} T_{j_1 \dots j_N}(x)\ .$$

- Tensores de posto N mistos são tensores com n índices covariantes e outros N-n contravariantes.
- A posição do índice indica a transformação correspondente.
- As transformações inversas não estão explícitas acima, mas também são possíveis.

Comentário: Bases de tensores de posto maior que 1

- Um tensor de componentes T^{ij} deve estar associado a uma base que se transforme inversamente. Poderíamos por exemplo denotar o tensor em si da seguinte forma:

$$|T\rangle = T^{ij}|e_{ij}\rangle \ .$$

- A expressão acima é correta, mas qual a relação entre as bases $\{|e_{ij}\rangle\}$ e $\{|e_i\rangle\}$?

- A relação é dada através da combinação de vetores (*produto tensorial*):

$$|e_{ij}\rangle = |e_i\rangle|e_j\rangle \equiv |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle,$$

isto é, coloque um vetor atrás do outro e não altere a ordem.

- A base dual é

$$\langle e^{ij}| = \langle e^i|\langle e^j|,$$

logo $\langle e^{ij}|e_{kl}\rangle = \delta^i_k \delta^j_l$.

- A base de um tensor contravariante de ordem N é $|e_{i_1 i_2 \ldots i_N}\rangle = |e_{i_1}\rangle|e_{i_2}\rangle \ldots |e_{i_N}\rangle$.

Comentário: Bases de tensores de posto maior que 1

- Um tensor de componentes T^{ij} deve estar associado a uma base que se transforme inversamente. Poderíamos por exemplo denotar o tensor em si da seguinte forma:

$$|T\rangle = T^{ij}|e_{ij}\rangle \ .$$

- A expressão acima é correta, mas qual a relação entre as bases $\{|e_{ij}\rangle\}$ e $\{|e_i\rangle\}$?

- A relação é dada através da combinação de vetores (*produto tensorial*):

$$|e_{ij}\rangle = |e_i\rangle|e_j\rangle \equiv |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle,$$

  isto é, coloque um vetor atrás do outro e não altere a ordem.

- A base dual é

$$\langle e^{ij}| = \langle e^i|\langle e^j|,$$

  logo $\langle e^{ij}|e_{kl}\rangle = \delta^i_k \delta^j_l$.

- A base de um tensor contravariante de ordem N é $|e_{i_1 i_2 \ldots i_N}\rangle = |e_{i_1}\rangle|e_{i_2}\rangle \ldots |e_{i_N}\rangle$.

Comentário

- Um tensor de comp
inversamente. Poder

- A expressão acima é
- A relação é dada atr

isto é, coloque um v

- A base dual é

$$\langle e^{ij} | = \langle e^i | \langle e^j |,$$

logo $\langle e^{ij} | e_{kl} \rangle = \delta^i_k \delta^j_l$.

- A base de um tensor contravariante de ordem N é $| e_{i_1 i_2 \ldots i_N} \rangle = | e_{i_1} \rangle | e_{i_2} \rangle \ldots | e_{i_N} \rangle$.

Para um tensor misto, por exemplo, dado pelas componentes $T^k{}_{ij}$, podemos usar a base

$$| e_k{}^{ij} \rangle = | e_k \rangle \otimes \langle e^i | \otimes \langle e^j | \ .$$

E sua base dual satisfaz

$$\langle e^k{}_{ij} | e_l{}^{mn} \rangle = \delta^k_l \delta^m_i \delta^n_j .$$

Comentário

- Um tensor de comp
  ir
- A
- A
  is
- A
  lo

Para um tensor misto, por exemplo, dado pelas componentes $T^k{}_{ij}$, podemos usar a base

Exercício 3.2:

Considere um espaço vetorial de base $\{ |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle \}$, em que $i, j = 1{,}2$ e $|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i) Qual a dimensão desse espaço?
ii) Escreva o elemento geral desse espaço.
iii) Qual a base dual?
iv) Repita os itens anteriores para $|e_1\rangle = \hat{i}$ e $|e_2\rangle = \hat{j}$.

- A base de um tensor contravariante de ordem N é $|e_{i_1 i_2 \dots i_N}\rangle = |e_{i_1}\rangle |e_{i_2}\rangle \dots |e_{i_N}\rangle$.

Nomes de índices especiais

- Além da distinção entre covariante (embaixo) e contravariante (em cima), há alguns nomes especiais para índices dependendo da função deles.

$$A^i = B^i{}_{jk} C^j D^k$$

Nomes de índices especiais

- Além da distinção entre covariante (embaixo) e contravariante (em cima), há alguns nomes especiais para índices dependendo da função deles.

Índices livres

$$A^{i} = B^{i}{}_{jk} C^{j} D^{k}$$

Índices mudos
ou índices contraídos

Nomes de índices especiais

- Além da distinção entre covariante (embaixo) e contravariante (em cima), há alguns nomes especiais para índices dependendo da função deles.

Índices livres

Índices mudos podem
ser trocados num mesmo lado
da equação, sem alterar o outro lado.

$$A^{i} = B^{i}{}_{jk}C^{j}D^{k} = B^{i}{}_{mn}C^{m}D^{n}$$

Índices mudos
ou índices contraídos

Nomes de índices especiais

- Além da distinção entre covariante (embaixo) e contravariante (em cima), há alguns nomes especiais para índices dependendo da função deles.

Índices livres

Índices mudos podem ser trocados num mesmo lado da equação, sem alterar o outro lado.

$$A^i = B^i{}_{jk} C^j D^k = B^i{}_{mn} C^m D^n$$

Índices mudos ou índices contraídos

Exercício 3.3: Num espaço bidimensional, verifique explicitamente que $B^i_{mn} C^m D^n = B^i_{kl} C^k D^l$ e que $B^i_{mn} C^m D^n \neq B^i_{kl} C^l D^k$.

Tensores de posto 2: δ^i_j e I_{ij}

- **Exercício 3.4**: Mostre que, se definirmos $\delta^i_j = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$ em um sistema de coordenadas específico, sendo δ^i_j (componentes de) um tensor, então essa definição de δ^i_j é válida para todo sistema de coordenadas.
- **Exercício 3.5**: Mostre que se definirmos $I_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$ em um sistema de coordenadas específico, sendo I_{ij} (componentes de) um tensor, então essa definição de I_{ij} não vale em geral para qualquer sistema de coordenadas. Sugestão de demonstração: Escreva a lei de transformação geral de I_{ij}. Escolha x' tal que em que $I'_{ij}(x')$ não satisfaça a condição acima.

- Observação: é comum denotar I_{ij} por δ_{ij}, estou usando I_{ij} para evitar confusão com δ^i_j. Somente δ^i_j satisfaz a definição da delta de Kronecker para todo sistema de coordenadas.

Tensores de posto 2: a métrica

- A métrica é um tensor de posto 2, totalmente covariante, que sempre satisfaz:
  - É simétrica: $g_{ij} = g_{ji}$
  - É não degenerada: $\det(g_{ij}) \neq 0$.
- I_{ij} é um exemplo de métrica. É a métrica euclidiana com coordenadas cartesianas.
- Diferentes geometrias possuem diferentes métricas.
  Diferentes métricas nem sempre levam a diferentes geometrias (pode ser a mesma geometria com outras coordenadas).
- Distâncias infinitesimais são expressas pelo *elemento de linha:*
  $$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$$
  Para coordenadas cartesianas em 2D, note que $ds^2 = dx^2 + dy^2$.
- **Exercício 3.6**: encontre a métrica euclidiana em coordenadas polares.

Tensores de posto 2: a métrica

- A métrica é um tensor de posto 2, totalmente covariante, que sempre satisfaz:
  - É simétrica: $g_{ij} = g_{ji}$
  - É não degenerada: $\det(g_{ij}) \neq 0$.
- I_{ij} é um exemplo de métrica. É a métrica euclidiana com coordenadas cartesianas.
- Diferentes geometrias possuem diferentes métricas.
  Diferentes métricas nem sempre levam a diferentes geometrias (pode ser a mesma geometria com outras coordenadas).
- Distâncias infinitesimais são expressas pelo *elemento de linha:*

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j = dx_i\, dx^i$$

Usando que, como vimos, podemos abaixar e levantar índices com a métrica.

  Para coordenadas cartesianas em 2D, note que $ds^2 = dx^2 + dy^2$.
- **Exercício 3.6**: encontre a métrica euclidiana em coordenadas polares.

Te

- A métrica é um te
  - É simétrica: g_{ij} =
  - É não degenera
- I_{ij} é um exemplo d
- Diferentes geomet
  Diferentes métric
  geometria com outra
- Distâncias infinite

Na notação de bra e ket, sendo $|dr\rangle$ um vetor infinitesimal

$$ds^2 = \langle dr | dr \rangle.$$

Em termos de uma base $\{|e_i\rangle\}$,

$|dr\rangle = dx^i |e_i\rangle$, logo $\langle dr| = dx_i \langle e^i|$ e portanto

$$ds^2 = dx_i dx^j \langle e^i | e_j \rangle = dx_i dx^i .$$

Usando que, como vimos, podemos abaixar e levantar índices com a métrica.

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = dx_i dx^i$$

Para coordenadas cartesianas em 2D, note que $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

- **Exercício 3.6**: encontre a métrica euclidiana em coordenadas polares.

Tensores de posto 2: a métrica inversa

- Como toda métrica é não-degenerada, toda métrica tem inversa.
- Mostra-se (como fizemos na Parte 2) que a inversa da métrica precisa ser tensor contravariante.
- Denotamos as componentes da inversa por g^{ij}. Pode-se escrever que
$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k \,.$$
- **Exercício 3.7:** Mostre que $g^{ij}g_{ij} = D$, em que D é a dimensão do espaço considerado.
- **Exercício 3.8**: O traço de uma matriz de componentes A_{ij} é comumente definido por $\operatorname{tr} A = \sum_i A_{ii}$. Se A_{ij} for um tensor, como definir o seu traço de tal forma a ser independente do sistema de coordenadas? Essa definição deve incluir a definição original como um caso particular.

Vetores a partir de covetores: o caso de $\vec{\nabla}\phi$

- Independentemente da métrica, podemos escrever $\langle \nabla\phi | = \partial_i\phi \langle e^i |$.

- Como estamos só lidando com espaços com produto interno, podemos transformar esse covetor (bra) em um vetor (ket). A transformação é simplesmente dada por
$$\langle \nabla\phi | \to | \nabla\phi \rangle = \partial^i\phi | e_i \rangle.$$

- Note que as componentes mudaram de $\partial_i\phi$ para $\partial^i\phi$. Com coordenadas cartesianas, essa diferença é inócua, pois a métrica é a matriz identidade I_{ij}. Logo $\partial^i \overset{*}{=} \partial_i$.

- Vamos agora expressar $\vec{\nabla}\phi = | \nabla\phi \rangle$ em coordenadas polares (comparar com exercício 1.6).

Expressando $\vec{\nabla}\phi$ na base $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$

- Coordenadas:

$$x^1 = r = \sqrt{x^2 + y^2} \;\text{ e }\; x^2 = \theta = \arctan(y/x).$$

- Métrica:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Pode ser encontrada pela transformação de coordenadas de I_{ij} . Ver Exercício. 3.6.
É fácil encontrá-la via $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ (considere distâncias com r ou θ constantes).

- Para expressar em função de $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$, é necessário encontrar $\langle e_i | e_j \rangle$.

$\langle e^i | e_j \rangle = \delta^i_j \implies \langle e_i | e_j \rangle = g_{ij}$ (abaixamos os índices de ambos os lados usando a métrica).

$$|e_1\rangle = \hat{r} \;\text{ e }\; |e_2\rangle = r\hat{\theta}.$$

Verifique essas passagens deste item, são rápidas. Compare com Exercício 1.3.

Expressando $\vec{\nabla}\phi$ na base $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$

- Juntando tudo, temos:

$$
\begin{aligned}
|\nabla\phi\rangle &= \partial^1\phi\,|e_1\rangle + \partial^2\phi\,|e_2\rangle \\
&= g^{1i}\partial_i\phi\,|e_1\rangle + g^{2i}\partial_i\phi\,|e_2\rangle \\
&\overset{*}{=} \frac{\partial\phi}{\partial r}|e_1\rangle + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}|e_2\rangle \\
&\overset{*}{=} \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}
\end{aligned}
$$

Esta é a expressão usual do $\vec{\nabla}\phi$ em coordenadas polares.
Exercício 3.9: Repetir os mesmos procedimentos para coordenadas esféricas.

Expressando $\overrightarrow{\nabla}\phi$ na base $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$

- Juntando tudo, temos:

$$|\nabla\phi\rangle = \partial^1\phi\,|e_1\rangle + \partial^2\phi\,|e_2\rangle$$

Dica:
Em coordenadas esféricas a métrica é

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Esta é a expressão usual do $\overrightarrow{\nabla}\phi$ em coordenadas polares.
Exercício 3.9: Repetir os mesmos procedimentos para coordenadas esféricas.

Derivada covariante

- Um passo natural seria agora considerar $\nabla^2\phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi$ em coordenadas polares.
- Mas para fazermos isso está faltando um último ingrediente que possibilitará tratar de qualquer derivada no contexto de tensores: **a derivada covariante**.
- **Exercício 3.10:** Vimos que $\partial_i\phi$ se transforma como um tensor. Contudo, $\partial_i\partial_j\phi$ não se transforma como um tensor. De forma geral, sendo A_i componentes de um tensor, mostre que $\partial_i A_j$ não é um tensor.
- Seja

$$\nabla_i A_j \equiv \partial_i A_j - \Gamma^k_{ij} A_k \,,$$

$$\Gamma^k_{ij} \equiv \frac{1}{2} g^{km}(\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}).$$

- $\nabla_i A_j$ define componentes de um tensor.

Derivada covariante

- Um passo natural seria agora considerar $\nabla^2\phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi$ em coordenadas polares.
- Mas para fazermos isso está faltando um último ingrediente que possibilitará tratar de qualquer derivada no contexto de tensores: **a derivada covariante**.
- **Exercício 3.10:** Vimos que $\partial_i\phi$ se transforma como um tensor. Contudo, $\partial_i\partial_j\phi$ não se transforma como um tensor. De forma geral, sendo A_i componentes de um tensor, mostre que $\partial_i A_j$ não é um tensor.
- Seja

$$\nabla_i A_j \equiv \partial_i A_j - \Gamma^k_{ij} A_k\,,$$

$$\Gamma^k_{ij} \equiv \frac{1}{2} g^{km}(\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}).$$

Símbolo de Christofell:
Não é um tensor.
É tal que, devidamente adicionado a uma derivada, produz um tensor.

- $\nabla_i A_j$ define componentes de um tensor.

Derivada covariante

- Explicitamente, temos:

$$\partial'_i A'_j(x') \neq \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\partial_k A_l(x) \qquad \text{— Não descreve um tensor}$$

$$\nabla'_i A'_j(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\nabla_k A_l(x) \qquad \text{— São componentes de um tensor.}$$

- Essas demonstrações são bem comuns e podem ser vistas em vários livros sobre o assunto.

Derivada covariante: aplicações para diferentes tensores

- Expressões gerais da derivada covariante:

$$\nabla_i \phi = \partial_i \phi$$

$$\nabla_i A_j = \partial_i A_j - \Gamma^k_{ij} A_k$$

$$\nabla_i A^j = \partial_i A^j + \Gamma^j_{ik} A^k$$

$$\nabla_i T_{jk} = \partial_i T_{jk} - \Gamma^l_{ij} T_{lk} - \Gamma^l_{ik} T_{jl}$$

$$\nabla_i T^k_j = \partial_i T^k_j - \Gamma^l_{ij} T^k_l + \Gamma^k_{il} T^l_j$$

(....)

- Importante propriedade da derivada covariante: $\boxed{\nabla_i g_{jk} = 0}$.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ em coordenadas polares

- O primeiro passo é calcular Γ^k_{ij}.
- Há formas para calcular esse divergente mais rapidamente, mas no momento é melhor fazer tudo passo a passo, evitando truques específicos ou relações que não vimos neste minicurso.
- Verificando componente a componente, as únicas componentes não nulas são:

$$\Gamma^1_{22} = -r \quad \text{e} \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}.$$ (Só precisaremos da última)

- $$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \partial_r A^1 + \partial_\theta A^2 + \Gamma^2_{21} A^1 \\ &= \partial_r A^1 + \partial_\theta A^2 + \frac{1}{r} A^1 \\ &= \frac{1}{r}\partial_r (r A^1) + \partial_\theta A^2\end{aligned}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ em coordenadas polares

- Falta agora associarmos A^1 e A^2 com A_r e A_θ. As duas últimas são as componentes do vetor $\vec{A}$ na base polar usal ($\hat{r}$ e $\hat{\theta}$).
- Lembremos que $|e_1\rangle = \hat{r}$ e $|e_2\rangle = r\hat{\theta}$. Consequentemente $A^1 = A_r$ e $A^2 = \dfrac{1}{r}A_\theta$.
- $$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\partial_r(rA^1) + \partial_\theta A^2$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r(rA_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta A_\theta \ .$$

- Esta acima é a resposta padrão para $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ em coordenadas polares.
- O que fizemos é uma mera verificação, ou ilustração, de como usar tensores para encontrar $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ em coordenadas polares. Tensores encontram sistematicamente as expressões envolvendo $\vec{\nabla}$ em *qualquer* sistema de coordenadas. No contexto de tensores é mais conveniente só usar bases coordenadas, sem menção a $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi} \ldots$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ em coordenadas polares

- Falta agora associarmos A^1 e A^2 com A_r e A_θ. As duas últimas são as componentes do vetor $\vec{A}$ na base polar usal ($\hat{r}$ e $\hat{\theta}$).
- Lembremos que $|e_1\rangle = \hat{r}$ e $|e_2\rangle = r\hat{\theta}$. Consequentemente $A^1 = A_r$ e $A^2 = \dfrac{1}{r}A_\theta$.
- $$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r}\partial_r(rA^1) + \partial_\theta A^2 \\ &= \frac{1}{r}\partial_r(rA_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta A_\theta \ .\end{aligned}}$$
- Esta acima é a resposta padrão para $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ em coordenadas polares.
- O que fizemos é uma mera verificação, ou ilustração, de como usar tensores para encontrar $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ em coordenadas polares. Tensores encontram sistematicamente as expressões envolvendo $\vec{\nabla}$ em *qualquer* sistema de coordenadas. No contexto de tensores é mais conveniente só usar bases coordenadas, sem menção a $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi} \dots$

$\nabla^2 \phi$ em coordenadas polares

- Para finalizar esta Parte 3, podemos usar os resultados obtidos de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ para obter

$$\nabla^2 \phi = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi = \nabla_i \nabla^i \phi \,.$$

- Como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \partial_r (r A_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta A_\theta \,,$$

temos que

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \partial_r (r \,(\vec{\nabla} \phi)_r\,) + \frac{1}{r} \partial_\theta \,(\vec{\nabla} \phi)_\theta$$

$$= \frac{1}{r} \partial_r \left(r \, \partial_r \phi \right) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \phi \,.$$

- O resultado acima é o resultado padrão de $\nabla^2 \phi$.

$\nabla^2\phi$ em coordenadas polares

- Para finalizar esta Parte 3, podemos usar os resultados obtidos de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ para obter

$$\nabla^2\phi = g^{ij}\nabla_i\nabla_j\phi = \nabla_i\nabla^i\phi\,.$$

- Como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\partial_r(rA_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta A_\theta\,,$$

temos que

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{1}{r}\partial_r(r\,(\vec{\nabla}\phi)_r\,) + \frac{1}{r}\partial_\theta(\vec{\nabla}\phi)_\theta \\ &= \frac{1}{r}\partial_r\left(r\,\partial_r\phi\right) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\phi\,.\end{aligned}}$$

- O resultado acima é o resultado padrão de $\nabla^2\phi$.

Produto escalar e métrica

- Embora haja uma relação entre produto escalar e métrica, nem sempre um produto escalar está diretamente associado a uma métrica. É interessante notar que por fim, ambas as notações são compatíveis.
- Vamos analisar exemplos em coordenadas polares (pois a métrica não é identidade nesse caso)
- Base normalizada:
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta}) \cdot (B_r \hat{r} + B_\theta \hat{\theta}) = A_r B_r + A_\theta B_\theta \,.$$
- Base coordenada:
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B^j g_{ij} \stackrel{*}{=} A^1 B^1 + r^2 A^2 B^2 \,.$$
- Essas respostas são compatíveis? Sim! Basta lembrar que $A^1 = A_r$ e $A^2 = A_\theta / r$.
- Na notação de bra e ket, $\langle A \,|\, B \rangle = A_i B^i = \vec{A} \cdot \vec{B}$.

Produto escalar e métrica

- Outra situação curiosa é com o produto $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla} \phi$.
- Em componentes da base coordenada, temos
$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla} \phi = A^i \partial_i \phi = A^1 \partial_1 \phi + A^2 \partial_2 \phi \, .$$
- Nota-se que <u>este produto escalar é independente da métrica</u>. Precisaríamos da métrica para escrever $\partial^i \phi$.
- Usando as componentes da base normalizada vem:

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla} \phi = A_r (\overrightarrow{\nabla} \phi)_r + A_\theta (\overrightarrow{\nabla} \phi)_\theta$$

$$= A_r \partial_r \phi + \frac{1}{r} A_\theta \partial_\theta \phi \, .$$

- Novamente, lembrando da relação entre as componentes, vemos que a resposta é a exatamente a mesma.

Derivada covariante e tensores de posto alto

- Provavelmente todos aqui já ouviram falar que não existe gradiente de vetor.
- Realmente, no contexto de cálculo vetorial, não faz sentido escrever algo como $\vec{\nabla}\vec{A}$
- No contexto de tensores, isso tem certo sentido.
- Já vimos vimos que $\nabla_i A^j$ define um tensor. Logo este é um tensor de posto 2.
- Embora em cálculo vetorial não se use este último tensor, usa-se o seguinte $\nabla^2 \vec{A}$, este último é um vetor (em teoria eletromagnética é comum isto).
- Na notação tensorial, vemos que $\nabla^2 \phi = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi$.
- E temos que $\nabla^2 A^i = g^{jk} \nabla_j \nabla_k A^i$. O cálculo de $\nabla^2 A^i$ segue de perto as contas que fizemos para $\nabla^2 \phi$: pode-se começar calculando $\nabla_i A^j$ para depois $g^{jk} \nabla_j \nabla_k A^i$.
- Podemos gerar um tensor de posto N+1 ao atuar uma derivada covariante: $\nabla_i T^{\cdots}_{\cdots}$.

Derivada covariante e tensores de posto alto

- Provavelmente todos aqui já ouviram falar que não existe gradiente de vetor.
- Realmente, no contexto de cálculo vetorial, não faz sentido escrever algo como $\vec{\nabla} \vec{A}$
- No contexto de tensores, isso tem certo sentido.
- Já vimo
- Embor , este último
- Na not
- E temo s que fizemos
- Podemos gerar um tensor de posto N+1 ao atuar uma derivada covariante: $\nabla_i T^{\cdots}_{\cdots}$.

Exercício 3.11: Encontre $\nabla^2 \vec{A}$ em coordenadas polares.

Lembrete: $\nabla_i T^k_j = \partial_i T^k_j - \Gamma^l_{ij} T^k_l + \Gamma^k_{il} T^l_j$ e reveja a dedução de $\nabla_i A^i$

Parte 4

O espaço-tempo de Minkowski

Espaço-tempo de Minkowski

- A geometria de Minkowski é bem próxima da euclidiana, ela é considerada uma geometria pseudo-euclideana. Será nosso primeiro exemplo de não-euclidiana.

- A geometria euclidiana pode ser definida a partir da métrica I_{ij}, junto de todas as transformações de coordenadas dessa métrica.

- Considere um espaço bidimensional de coordenadas (t, x) cuja métrica seja dada por
$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$\mu, \nu = 0{,}1$. Está é *métrica de Minkowski em 2D e em coordenadas canônicas*.

- O elemento de linha é então $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 = -dt^2 + dx^2$.
Importante: t aqui é apenas um nome de uma variável. Você pode igualmente chamá-la de y ou Mickey Mouse. Depois veremos que há uma relação com o tempo, mas tem de ficar claro que essa relação não se deve ao nome da variável, mas sim a aspectos geométricos.

Espaço-tempo de Minkowski

- **Exercício 4.1**: Seria possível fazer uma transformação de coordenadas de forma a associar uma métrica euclidiana com a de Minkowski? A resposta é negativa. Explique. Um caminho direto: escreva a transformação de $g'_{00}(x')$, partindo de $g_{\mu\nu} = I_{\mu\nu}$. Mostre que é impossível que g'_{00} seja igual a -1.

- É fácil mostrar que a métrica euclidiana em coordenadas cartesianas é invariante por rotação. Para Minkowski em coordenadas canônicas isso é falso, mas essa métricaé invariante por outra transformação…

- **Exercício 4.2:** Mostre que a métrica de Minkowski (em coordenadas canônicas) em 2D é invariante perante a seguinte transformação:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Espaço-tempo de Minkowski

- Identificando $\cosh\varphi = \gamma$ e $\sinh\varphi = \beta\gamma$ (em que β e γ são constantes bem conhecidas de relatividade especial, que satisfazem $\gamma^2(1-\beta^2)=1$), e usando $c=1$, nota-se que essas últimas transformações são os "boosts" das **transformações de Lonrentz**.

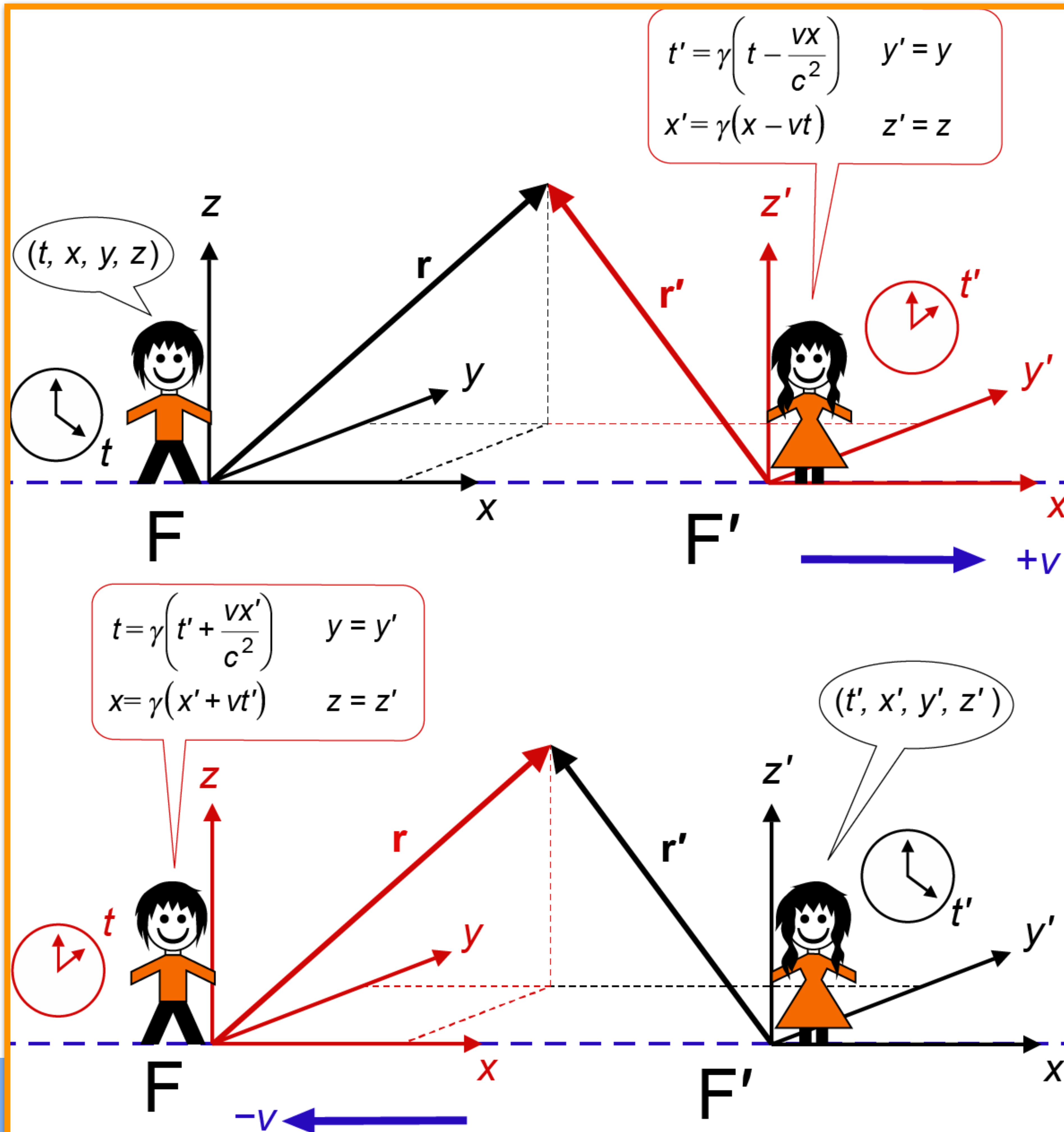
- **Breve observação sobre $c = 1$.**
  - No SI, $c = 2{,}998 \times 10^8$ m/s .
  - Ao fixar $c = 1$ estamos dizendo que $2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{s}$, ou seja, é uma conversão de unidades, uma relação entre metro e segundo.
  - Não tem nenhum problema de usar tal conversão, desde que ela seja usada coerentemente. Semelhantemente, várias outras relações arbitrárias entre unidades são possíveis, por exemplo entre kg e m, ou K e s, mas não entre km e m.
  - Grandezas adimensionais não podem ser redefinidas dessa forma. Assim, π e i não podem ser tomados como 1.
  - $c = 1$ é uma conversão confusa para o nosso dia a dia, mas muito útil para física fundamental.

Espaço-tempo de Minkowski

- Assim, no contexto de relatividade especial, há certa identificação de transformações de coordenadas com mudanças de referencial. Mas isso não é tão forte quanto parece...

Clique na imagem para a versão original

- Isso só funciona para um conjunto específico de transformações de coordenadas.
- Em geral, mudar coordenadas nada tem a ver com mudança de referencial.
- Os *boosts e as rotações globais* têm interpretação física imediata: coincidem com as coordenadas “naturais" de outro observador, pois ambos “vêem" a mesma métrica.
- É possível tratar relatividade especial em qualquer sistema de coordenadas (embora isso não fosse claro no início da relatividade especial).



Espaço-tempo de Minkowski

- Vimos que o elemento de linha, que mede infinitésimos de distância, ds^2, é um invariante por transformação de coordenadas.
- Logo, em particular, $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ é invariante por transformações de Lorentz.
- Como a métrica de Minkowski nas coordenadas canônicas é constante, pode-se facilmente calcular a versão de ds^2 para pontos em distâncias finitas, denotado por Δs^2. Nesse contexto, Δs^2 é chamado de **intervalo** e é um invariante.
- Eventos são pontos no espaço tempo. São necessários dois eventos para estabelecer o intervalo entre eles.
- Eventos com intervalo tipo tempo podem estar casualmente conectados e têm $\Delta s^2 < 0$. Eventos com intervalo do tipo espaço, não podem estar casualmente conectados, tem $\Delta s^2 > 0$. Eventos tipo luz satisfazem $\Delta s^2 = 0$.

Espaço-tempo de Minkowski

- Em relatividade especial, defini-se a chamada quadri-velocidade por $U^\mu \equiv \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$, em que τ é chamado de tempo próprio.
- Trata-se do tempo medido entre dois eventos num referencial em que ambos eventos ocorrem num mesmo ponto do espaço. Ou seja, para esse observador $dx = 0$, consequentemente $ds^2 = -dt^2$ e temos $d\tau^2 = -ds^2$.
- Em relatividade especial, a velocidade usual (trivelocidade) de um corpo material pode ser qualquer, desde que abaixo da velocidade da luz. Contudo, a quadrivelocidade de qualquer corpo material tem norma constante, não importa com que velocidade a partícula se propague:

$$\|U\|^2 = U^\mu U^\nu \eta_{\mu\nu} = \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\nu} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = -1\,.$$

Espaço-tempo de Minkowski

- **Exercício 4.3**: Considere o espaço-tempo 4D. A trivelocidade é a velocidade usual dada por $v^i = \dfrac{dx^i}{dt}$, em que $i = 1,2,3$. A partir de $U^\mu U_\mu = -1$, conclua que $\Delta t = \gamma \Delta\tau$, em que

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v_i v^i}} \,.$$

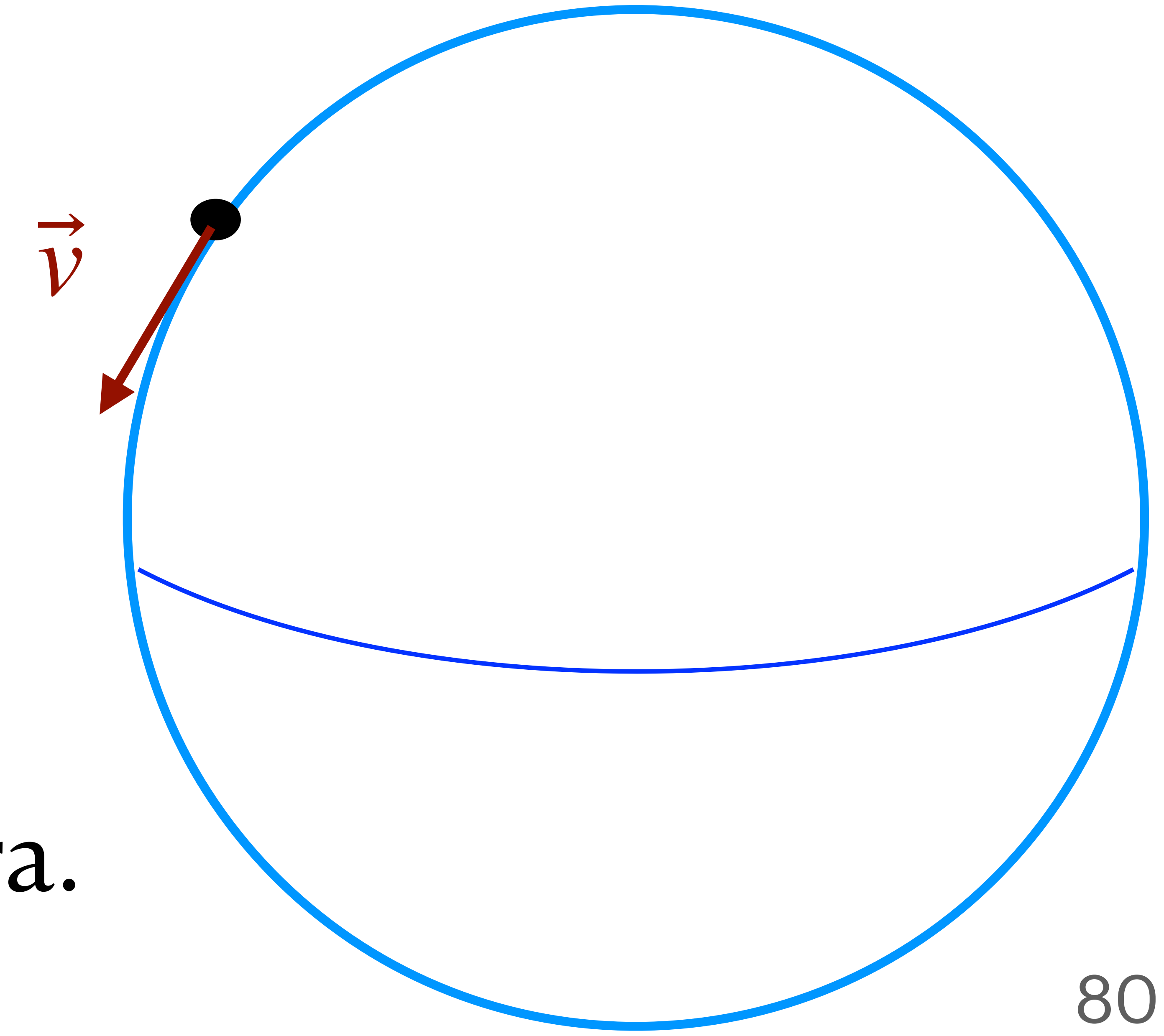
Note que $v^i v_i \geq 0$ e que $v^i v_i = 1$ corresponde à velocidade da luz. Consequentemente γ satisfaz $1 \leq \gamma < \infty$ e temos $\Delta t > \Delta\tau$ (ou seja, o tempo passa mais lentamente para quem está viajando num foguete, assim como para qualquer partícula que esteja se movendo rapidamente).

- **Exercício 4.4:** Escreva a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas.

Parte 5
Noções de geometria Riemanniana e a equação de Einstein

Noções de geometria Riemanniana

- Comecemos por um problema bem específico: considere ume partícula presa a uma esfera. A partícula só pode se mover junto à superfície da esfera.
- Naturalmente, você imaginou algo parecido com o desenho, visualizando uma superfície bidimensional (esfera) imersa no espaço euclidiano 3D.
- Nesta situação, podemos usar tudo o que conhecemos de geometria euclidiana para descrever a geometria da esfera.
- Podemos também facilmente tratar do vetor velocidade dessa partícula. Note que esse vetor está (naturalmente) no espaço euclidiano 3D, mas ele é tangente à esfera, não está na esfera.
- Dois pontos arbitrários na esfera não definem um vetor na esfera.

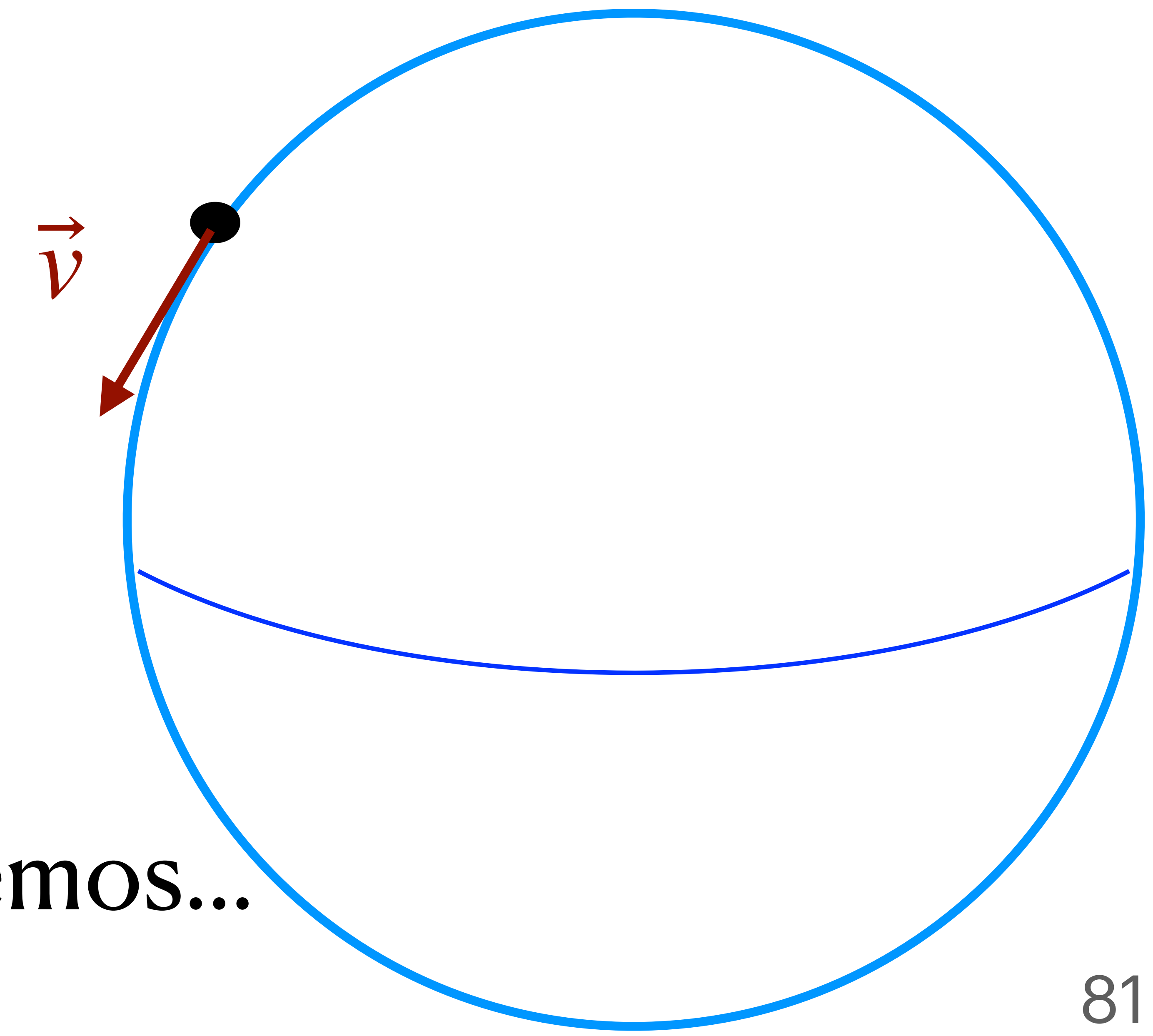


Noções de geometria Riemanniana

- No contexto de geometria 3D euclidiana, é mais simples descrever uma esfera usando coordenadas esféricas. E já vimos a métrica euclidiana em coordenadas esféricas:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

- Para a partícula, que está presa na superfície, ela não pode explorar a dimensão radial, tudo o que devemos precisar para descrever a dinâmica dessa partícula deve ser da seguinte métrica:

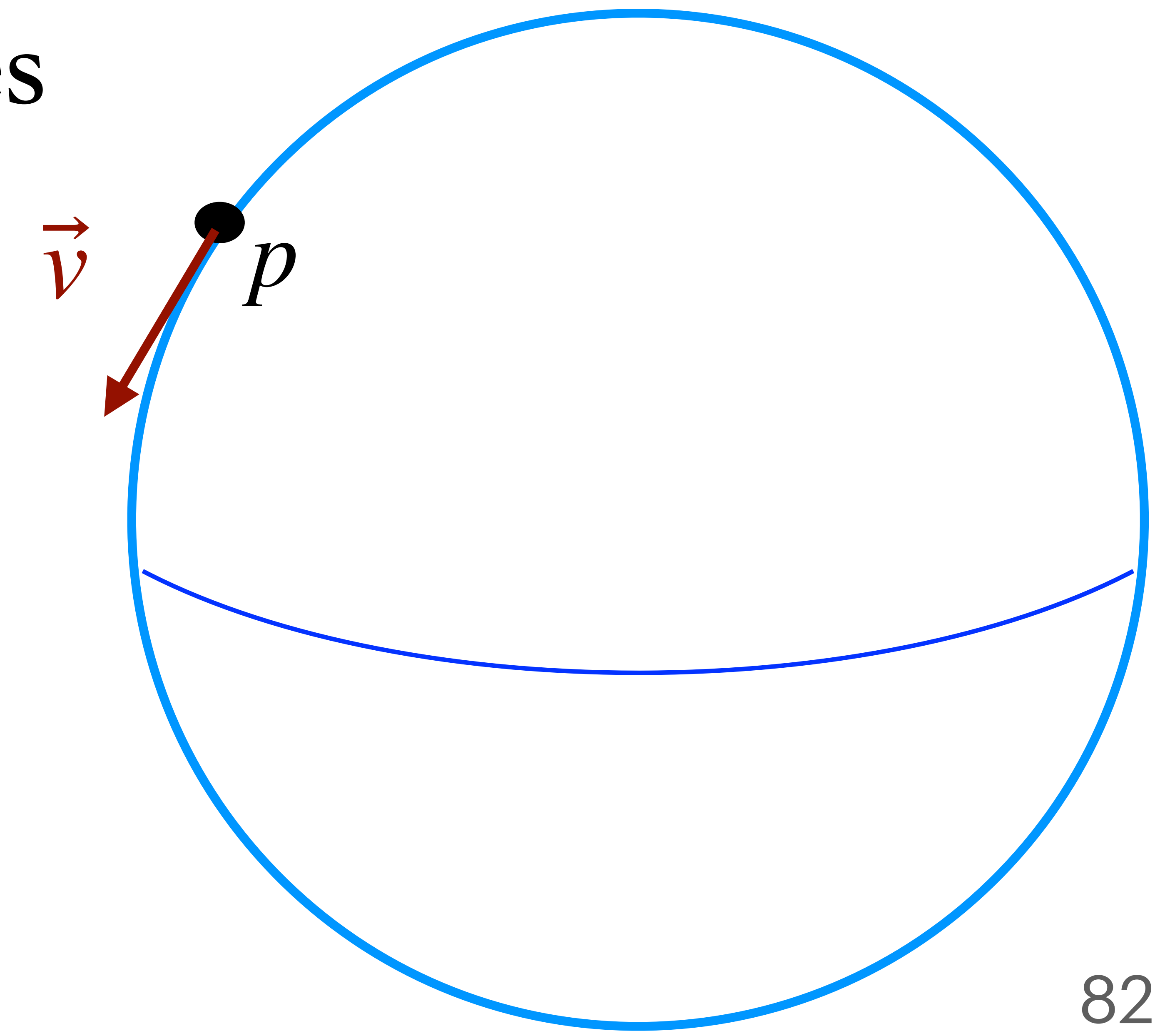


$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

A esfera tem raio R. Os índices a, b correm somente os valores 1,2. A métrica acima é muito simples, mas não é euclidiana! Veremos...

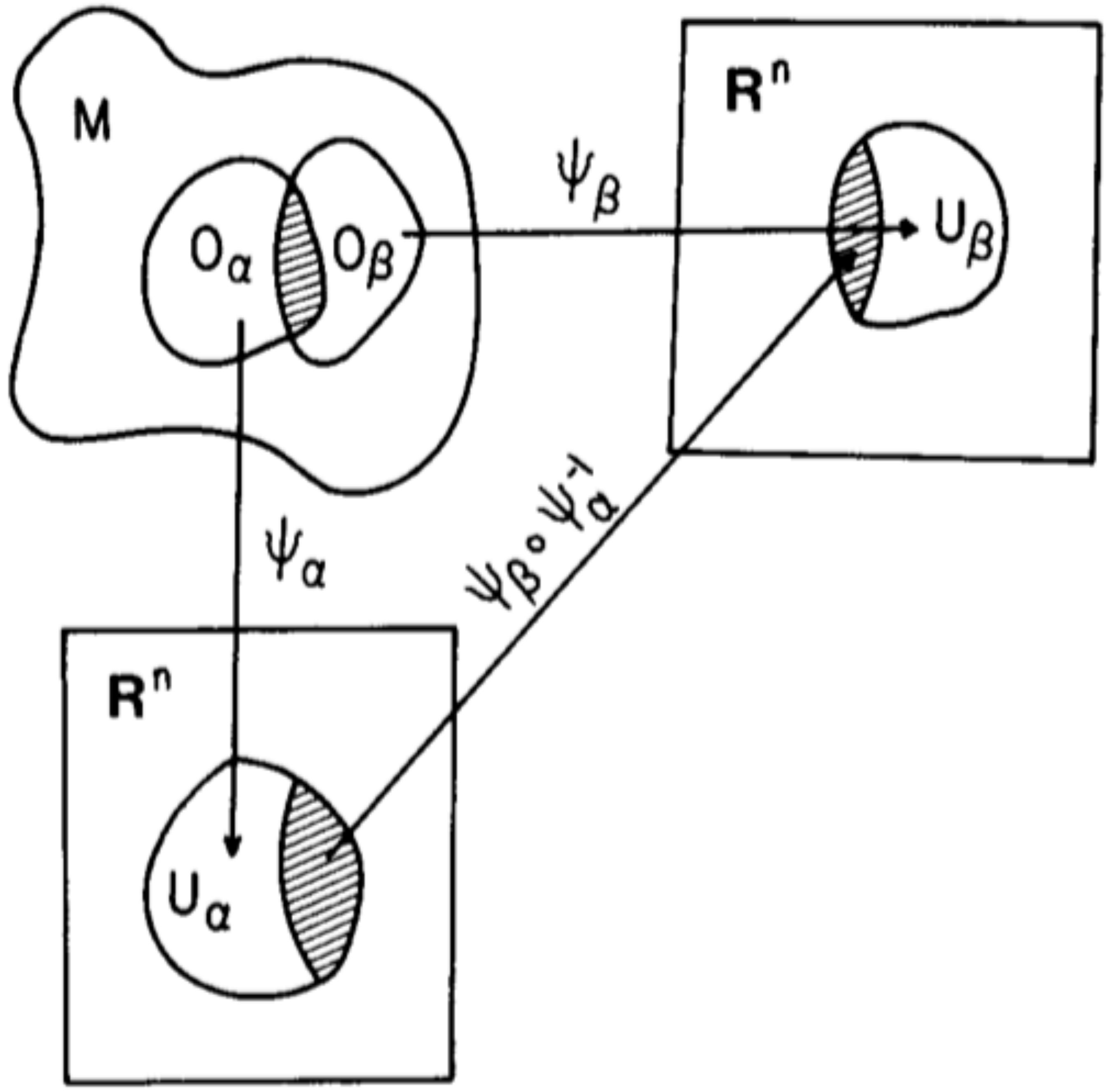
Noções de geometria Riemanniana

- Todo nosso desenvolvimento sobre tensores foi baseado em vetores (e covetores). Mas o que significam vetores para o espaço bidimensional da esfera?
- Pode-se pensar em diversas formas de se definir vetores nessa situação, como motivação podemos usar o caso do vetor velocidade.
- O vetor velocidade de uma partícula na esfera não está na esfera, está no plano tangente à esfera associado à posição da partícula.
- Enquanto os pontos da esfera estão num espaço M, seus vetores estão num espaço tangente a M em p.
- O espaço em que estão os vetores em p é comumente denotado por T_pM (espaço tangente a M em p).
- Como criar uma base de vetores nesse espaço?
- Observação: note que $\mathbb{E}^2 = T_p\mathbb{E}^2$ para qualquer $p \in \mathbb{E}^2$.



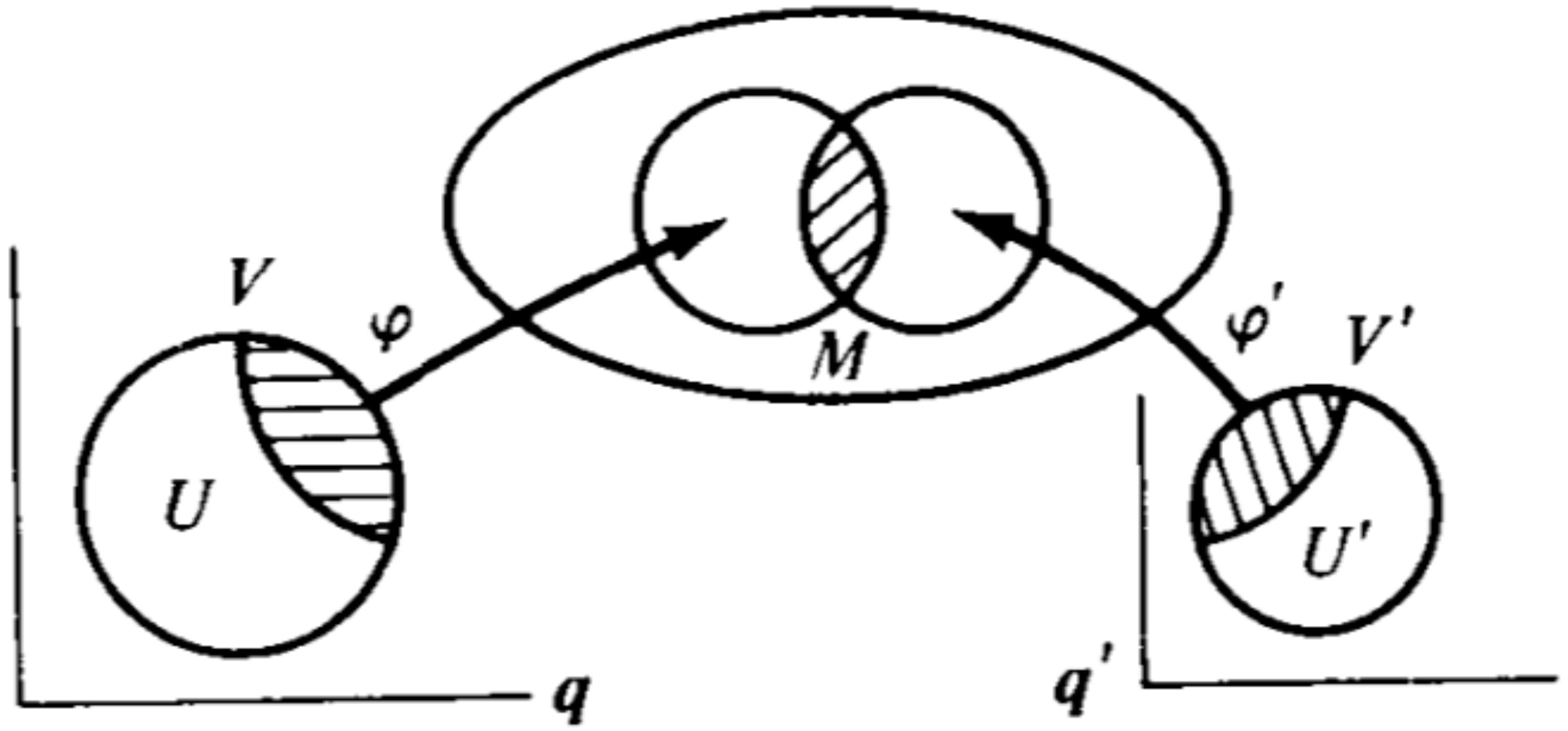
Noções de geometria Riemanniana

- Precisaremos do conceito de variedade (*manifold* em inglês).
- Há vários livros sobre o assunto, ao lado referência a dois no contexto de física.
- Um livro matemático e bem sucinto é John Lee, *Riemannian Manifolds: an introduction to curvature*.
- Por definição, *localmente toda variedade pode ser aproximada por um espaço euclidiano de mesma dimensão*.
- A partir desse espaço euclidiano local, pode-se gerar bases de vetores. Por exemplo, a base vetorial pode ser construída via $\partial_i \phi_{(j)}$ (ver Parte 1).
- O padrão é associar vetores a $T_p M$ e covetores ao espaço cotangente denotado por $T_p^* M$.



Wald, General Relativity

Arnold, Classical Mechanics



No contexto de geometria e tensores, a notação de bra e ket não é padrão. Contudo é uma notação que físicos já usam em outros contextos e é natural a associação.

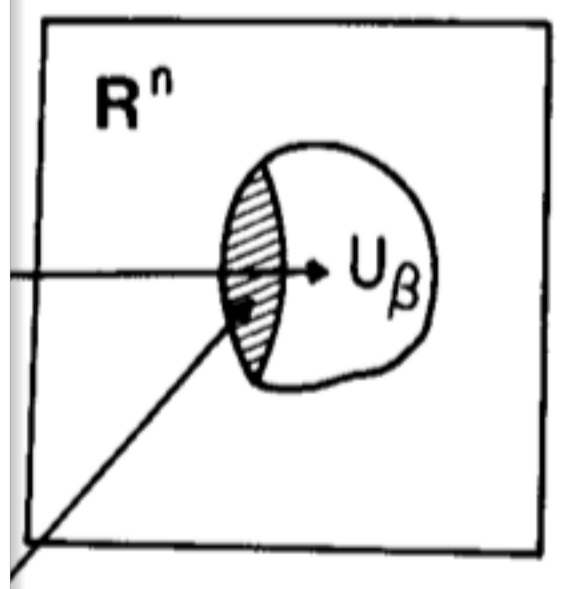
Uma notação padrão usada por matemáticos é associar vetores a “sustenido" e covetores a “bemol", assim

$$|A\rangle \leftrightarrow A^\sharp \text{ e } \langle A| \leftrightarrow A^\flat\,.$$

Eu gosto de música, mas neste contexto acho bra e ket bem mais elegante...

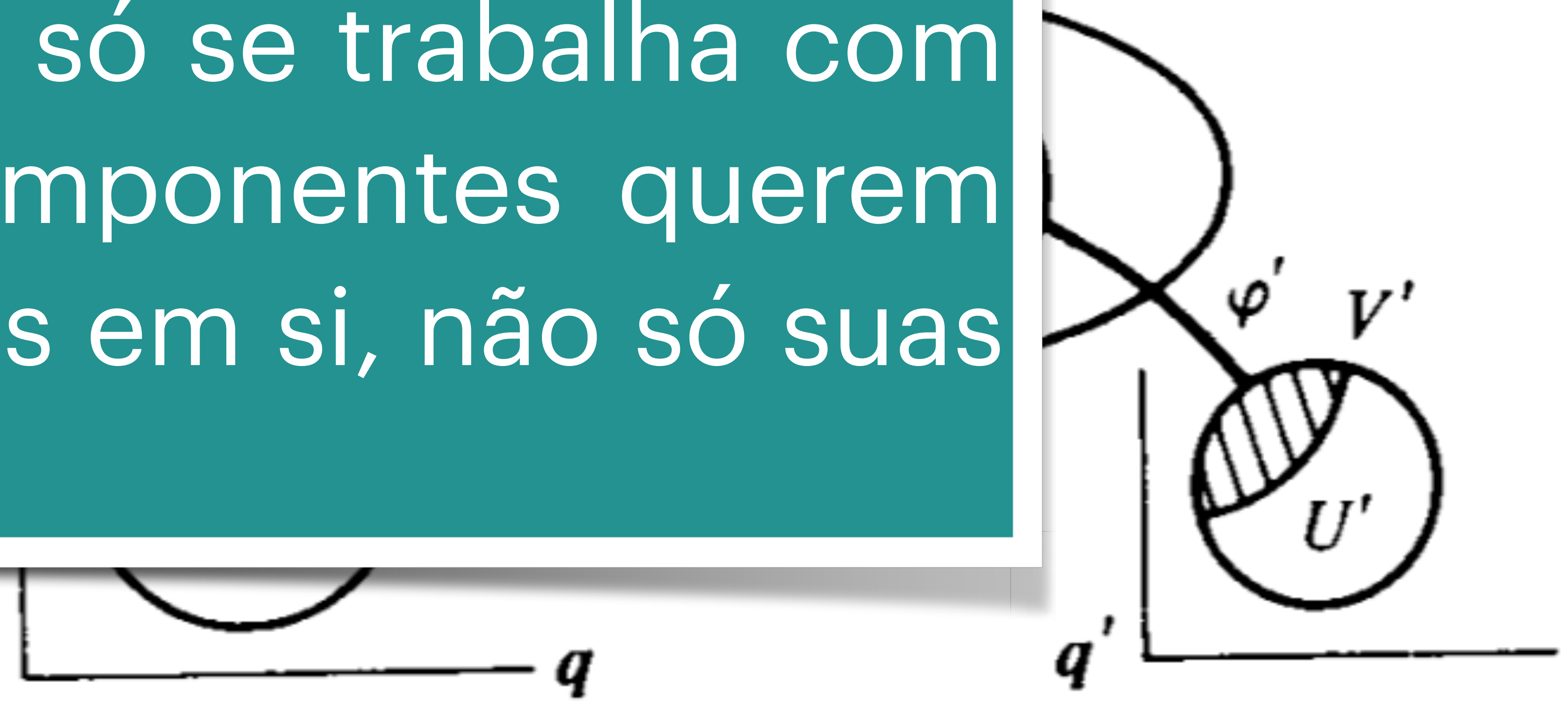
Na maioras das contas envolvendo tensores, só se trabalha com componentes. Para entender o que tais componentes querem dizer, é relevante entender o que são tensores em si, não só suas componentes.

- Preci
- Há vá
  no co
- Um li
  Manif
- Por d
  por u
- A par
  gerar
  pode
- O pa
  espaç



l Relativity

Mechanics



Geometria riemanniana e curvatura

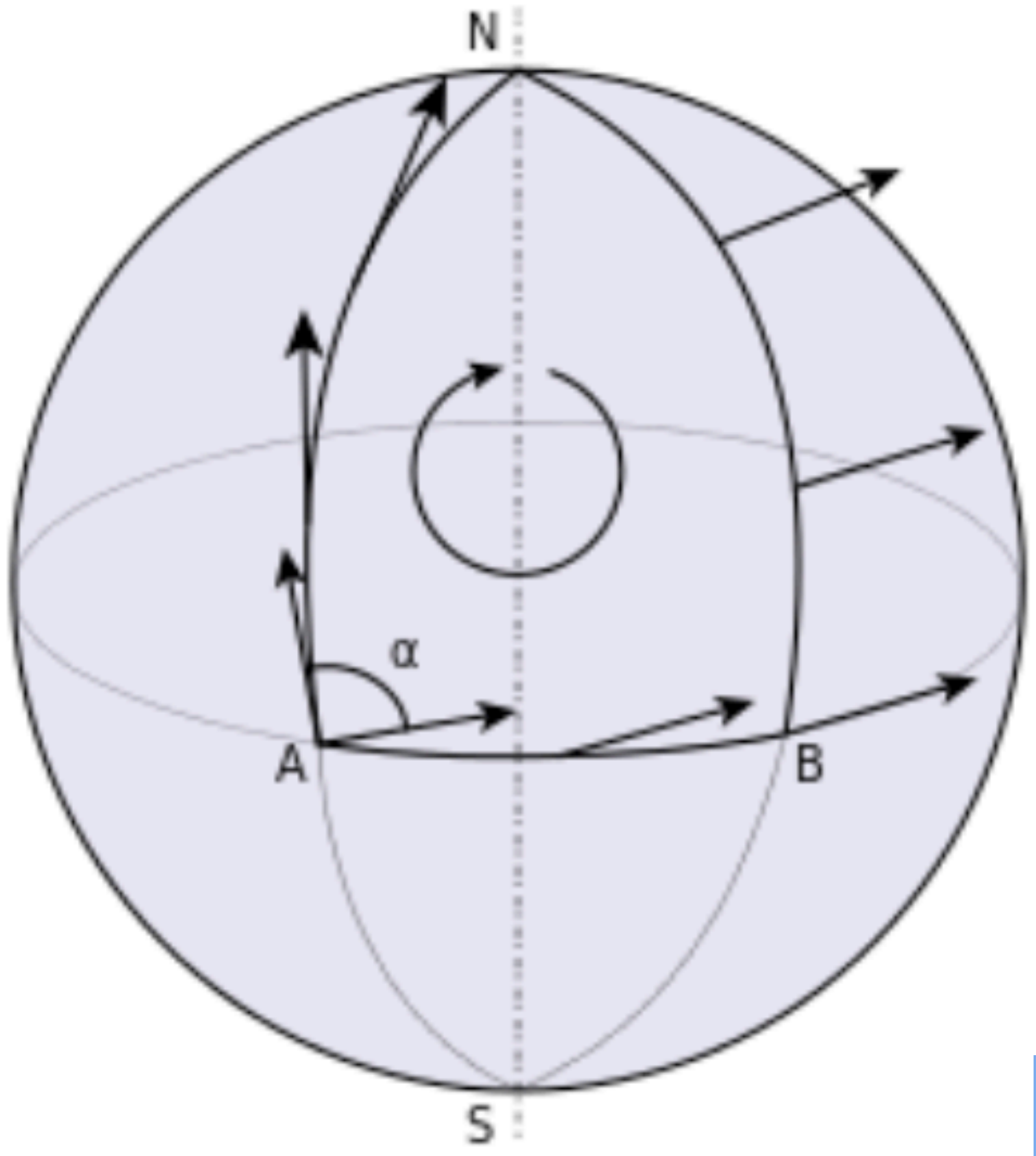
- Uma variedade riemanianna é dada pelo par (M, g), ou seja, uma variedade M munida de uma métrica (riemanniana) denotada por g.
- Métricas riemannianas estão de acordo com todas as propriedades que vimos de produto interno na Parte 2 (rigorosamente, definimos o produto interno associado a métricas pseudo-riemannianas, estas admitem normas negativas, como é importante para relatividade).
- A métrica euclidiana é um caso particular de métrica riemanniana.
- A métrica de Minkowski é um caso particular de métrica pseudo-riemanniana.
- Para gerar derivadas covariantes, precisamos de uma informação a mais: precisamos saber quem é *conexão afim* Γ^k_{ij}.
- Γ^k_{ij} pode ser determinado a partir da métrica se for imposta a condição $\nabla_i g_{jk} = 0$. O que faremos, e que é condição base da relatividade geral. Alguns textos incorporam esta condição como definição de variedade riemanniana (ver Plebanski).

Geometria riemanniana e curvatura

- **Exercício 5.1**: A partir de $\nabla_i g_{jk} = 0$ e lembrando que $\nabla_i T_{jk} = \partial_i T_{jk} - \Gamma^l_{ij} T_{lk} - \Gamma^l_{ik} T_{jl}$, encontre que $\Gamma^k_{ij} \equiv \frac{1}{2} g^{km} (\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij})$.
  Dica: A demonstração é curta, mas pode não ser fácil de fazer de imediato. É uma demonstração clássica, quase qualquer livro de relatividade geral inclui esta demonstração. Chama-se de compatibilidade da conexão com a métrica, ou compatibilidade métrica.

- O conceito de curvatura é comumente introduzido a partir do conceito de transporte paralelo.

- Contudo, vamos ser mais pragmáticos aqui e vamos diretamente à conclusão. O ângulo α depende do valor de certo tensor. Esse ângulo é sempre nulo (geometria plana) se esse tensor for nulo. Esse tensor é chamado de *tensor de Riemann* R^i_{jkl} . Ele é definido explicitamente no próximo slide.



Tensor de Einstein

- Dada uma métrica cujos índices estão associados ao espaço-tempo ($g_{\mu\nu}$), para encontrar o tensor de Einstein basta fazer uma sequência de derivações e somas, como abaixo indicadas:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}(\partial_\lambda g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\lambda\kappa} - \partial_\kappa g_{\nu\lambda}),$$

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} = \partial_\lambda \Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\mu}_{\kappa\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda},$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}, \qquad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

- Isto é o suficiente para definir o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Basta seguir esses procedimentos algébricos para encontrá-lo.

Parte 6
Códigos para tensores e a equação de Einstein

Linguagens e softwares

- Aqui, nesta forma de slides, explico como fazer as instalações dos softwares necessários.

- Lembrar que tudo aqui são sugestões, há várias outras formas de fazer a mesma coisa, além de vários outros softwares não mencionados.

- Material complementar é enviado em anexo.

Mathematica

- Alunos da UFES podem instalar o Mathematica via https://fisica.ufes.br/pt-br/mathematica/instalacao e seguir os passos indicados.

- Pode-se criar um código do zero para computar tensores, ver exemplo enviado. A base não é especialmente difícil, em poucas linhas pode-se fazer.
  - Isto é bom para desenvolver suas aptidões de programação e para ter uma ideia de como esses pacotes de tensores podem funcionar. Não é a forma mais prática ou rápida.

- Para um pacote simples e focado na computação de componentes de tensores, ver https://github.com/davi-rodrigues/FTeV

- Para um grande pacote bastante completo e avançado ver http://www.xact.es — Entendo este como o mais completo que existe. Em geral, ao menos no momento, é melhor que o EinsteinPy ou outras alternativas em Python. Mas o EinsteinPy é mais recente e tem se desenvolvido bem...

Python

- Sugiro fortemente instalar Python através do Anaconda: https://www.anaconda.com/products/individual

- Esta instação inclui o próprio Python, vários pacotes populares de Python e algumas interfaces gráficas, em particular o Jupyter.

- Para instalar o EinsteinPy: https://docs.einsteinpy.org/en/stable/getting_started.html
  - Em resumo, basta copiar e colar a seguinte linha de comando no terminal:
    ```
    conda install -c conda-forge einsteinpy
    ```

Exercício 6.1: sugiro fazer com computador

- A métrica de Schwarszchild em coordenadas (t, r, θ, φ) é dada por

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

- Ela foi a primeira solução de buraco negro encontrada. Acima, r_s é o raio de Schwarszchild: o corpo que cruzar esse raio não pode mais sair.
  - i) Verifique que essa métrica satisfaz a equação de Einstein para o vácuo: $G_{\mu\nu} = 0$.
  - ii) Calcule o escalar de Kretschmann ($R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa} R_{\mu}{}^{\nu\lambda\kappa}$). Você deve encontrar que esse escalar diverge em $r = 0$ proporcionalmente com r^{-6}.

Fim!

Sem tensores, nada existiria.