Parte 1 - Geometria diferencial

Curso de Relatividade Geral I

Prof.: Davi C. Rodrigues

PPGCosmo, semestre 2022/2

Página da disciplina: https://www.davi.cosmo-ufes.org/rg2022-2.html

- Estas notas são primordialmente baseadas no livro do Wald. Contudo, tanto omitem algumas informações do Wald quanto contém outros tópicos que não estão no Wald.
- Estas notas visam ajudar, mas não substituem qualquer livro.
- Estas notas foram digitadas usando markdown, via Typora. Não há tantas funções e opções quanto no Latex, mas a digitação é um pouco mais rápida.

1. Relatividade Geral: como e por quê?

Esta é apenas uma breve discussão inicial de RG.

Um primeiro ponto a ser discutido é como chegou-se à relatividade geral.

- Não havia uma necessidade clara na época da criação da relatividade geral, não no sentido tal como houve necessidade do desenvolvimento da mecânica quântica.

- Havia uma única observação já conhecida e problemática, a precessão do periélio de Mercurio. Ela estava estabelecida como um problema ao menos desde 1852 por Urbain Le Verrier, estando em contradição com dados observacionais. Hoje sabemos que sua resolução completa requer RG.
- Tal como Einstein descreve neste artigo para o London Times em 1919, o desenvolvimento de RG se deu devido a questões que relatividade especial levantou. Certamente, RG não foi feita para explicar a precessão do periélio, ou qualquer fenômeno gravitacional em particular.

Sem a pretenção de descrever os processos históricos, ressalto as seguintes questões:

- Embora a relatividade especial seja comumente desenvolvida com a métrica de Minkowski na forma canônica, é fácil notar que relatividade especial não precisa estar "restrita" a essas coordenadas. Por exemplo, ao usar coordenadas esféricas para a seção espacial, a métrica de Minkowski sai da forma canônica, mas a geometria segue sendo a de Minkowski (com outras coordendas).
  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.
  Nota-se que estou usando $c = 1$.

- Não é difícil de ouvir comentários de que a relatividade especial só seria capaz de tratar a métrica de Minkowski na forma canônica, sendo necessário relatividade geral para tratar de sistemas de coordenadas mais exóticos. Isso é falso (talvez historicamente tenha ocorrido uma confusão com esse ponto, mas atualmente hoje é claramente falso). É trivial tratá-la em quaisquer outros sistemas de coordenadas. Por exemplo, em coordendas esféricas:
  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$.
  O elemento de linha acima é exatamente o mesmo anterior, apenas mudamos as coordendas, não fizemos nenhuma alteração física (ou geométrica).

- Por mais geral que seja a mudança de coordendas com respeito à forma canônica de Minkowski, a essência da geometria segue sendo a mesma, ou seja, a do espaço-tempo de Minkowski.

- Um caso de relatividade especial bastante peculiar é o espaço-tempo de Rindler. A métrica de Rindler pode ser escrita da seguinte forma:
  $ds^2 = -x^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

- Como veremos em detalhes mais tarde, o "espaço-tempo de Rindler" não é verdadeiramente um novo espaço-tempo, é apenas o espaço-tempo de Minkowski escrito de uma forma diferente (rigorosamente é uma parte do espaço-tempo de Minkowski). Por esse motivo, é comum se referir a ele por Coordenadas de Rindler, ao invés de espaço-tempo de Rindler.

- Sabendo a resposta, é fácil verificar que o "espaço-tempo de Rindler" é Minkowski. Basta usar a seguinte transformação de coordenadas, em que a linha é usada para as coordenadas de Rindler:
  $t = x' \sinh t'$ e $x = x' \cosh t'$.

2. Variedades (*manifolds*)

- De forma geral e em essência, uma variedade é um espaço topológico que localmente sempre pode ser mapeada em um espaço Euclideano. Nossa ênfase aqui será para um caso particular, as variedades diferenciáveis.
- Uma variedade real M, n dimensional e de classe C^∞ é um conjunto de pontos munido de uma coleção de subconjuntos $\{O_\alpha\} \subset M$ que satisfazem:
  1. $\forall p \in M$, existe O_α tal que $p \in O_\alpha$.
  2. $\forall \alpha$ há mapa $\psi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$, em que U_α é um aberto de $\mathbb{R}^n$.
     O mapa ψ_α precisa ser um homeomorfismo: é bijetivo, é contínuo e sua inversa é contínua também.
  3. Se $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, seja $\psi_\alpha : O_\alpha \cap O_\beta \to R_\alpha \subset U_\alpha$, em que R_α é aberto em U_α.
     Seja $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : R_\alpha \to V_\beta \subset U_\beta$, em que V_β é aberto em U_β.

     $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : R_\alpha \to V_\beta$ é função de classe C^∞.

É importante notar que $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ é função de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sendo passível de aplicação do cálculo em $\mathbb{R}^n$. Assim, podemos estender as noções de cálculo em espaços Euclidenanos para variedades diferenciáveis.

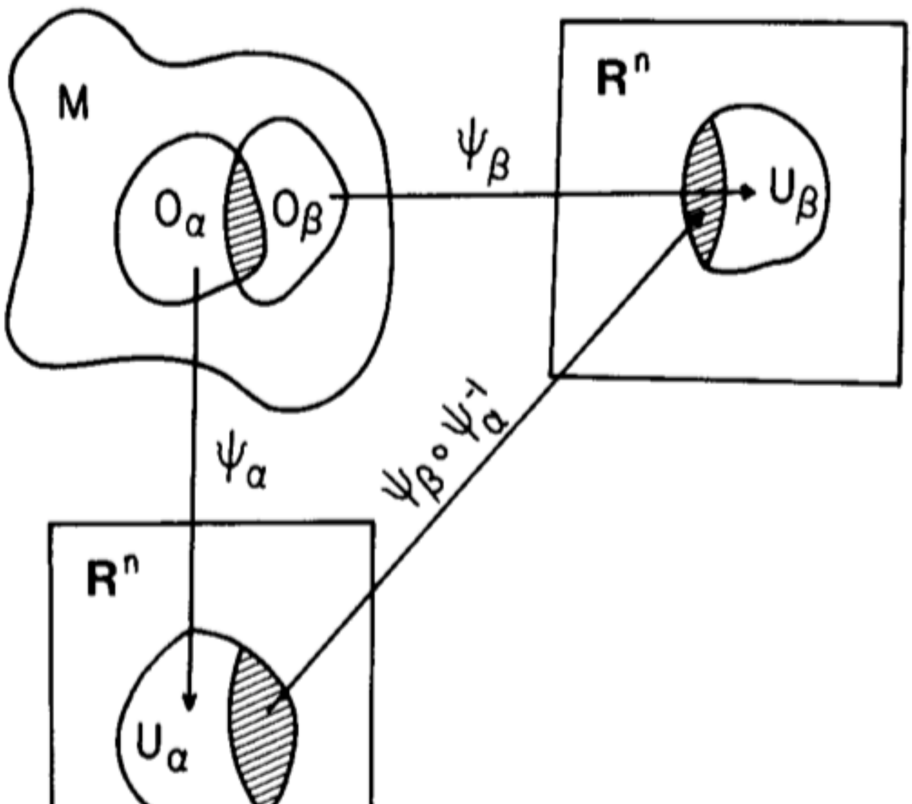


Fig. 2.1. An illustration of the map $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ arising when two coordinate systems overlap.

- ψ_α é chamado de carta (ou carta local). Veremos a interpretação no contexto da física em breve.
- Para variedades de classe C^k, trocar C^∞ por C^k na definição.

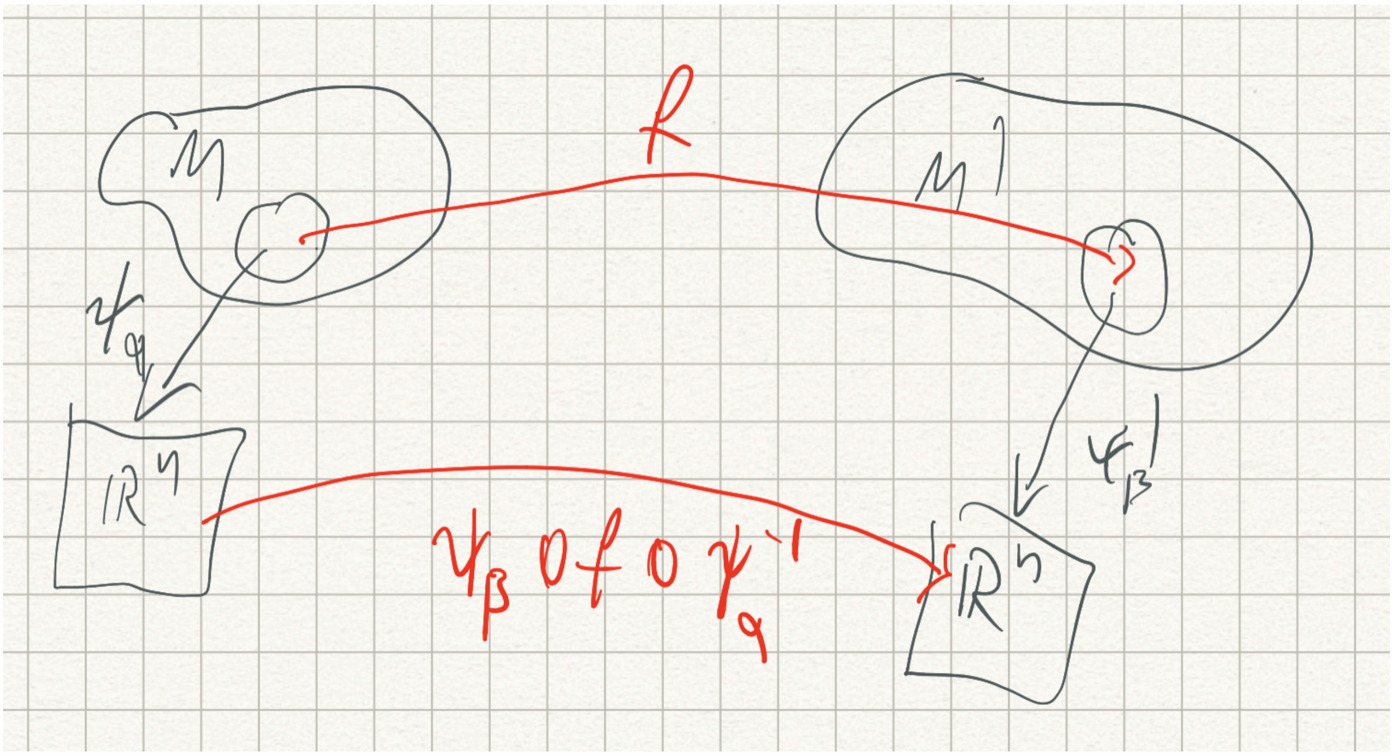
- Este contexto é um anto distante do dia a dia de cálculo de tensores na física. Contudo, usamos frequentemente "cartas locais". O que elas significam no contexto de cálculo tensorial?

2.2. Exemplos de variedades

- Exemplo trivial: o próprio espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ é uma variedade.
- A 2-esfera S^2 ("casca esférica", não é nem uma bola nem um círculo) não pode ser integralmente mapeada em um espaço $\mathbb{R}^2$ (quero dizer, não há um homeomorfismo capaz de estabelecer essa relação). Mas se a dividirmos em duas partes, cada uma delas pode ser devidamente mapeada no $\mathbb{R}^2$; contudo não dá para cobrir a esfera com dois conjuntos abertos. Logo, são necessários mais do que O_1 e O_2. O Wald apresenta um mapa explícito com 6 abertos.
  Exercício: Completar a demonstração.
- A dimensão de uma variedade é igual à dimensão dos espaços euclideanos que são usados para descrevê-la localmente.
- Dados duas variedades M e M', de dimensões D e D' , pode-se construir uma terceira dada pelo produto $M'' = M \times M'$. Um ponto $p'' \in M''$ é dado pelo par (p, p'). Assim, a dimensão de M'' é $D'' = D + D'$. Por exemplo, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Um espaço cilíndrico bidimensional é $\mathbb{R} \times S^1$. Um toróide é dado pelo espaço $S^1 \times S^1 \neq S^2$. A esfera e o toroide são espaços topológicos diferentes, não há homeomorfismo que associe um a outro.

2.3. Difeomorfismo

- Um mapa $f : M \to M'$ é de classe C^∞ se $\forall \alpha$ e $\forall \beta$, $\psi'_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ for C^∞. Ver figura abaixo.
- Se $f : M \to M'$ for C^∞ e se f^{-1} existir e for C^∞, então f é um **difeomorfismo** entre M e M'. As variedades M e M' são ditas serem difeomórficas.

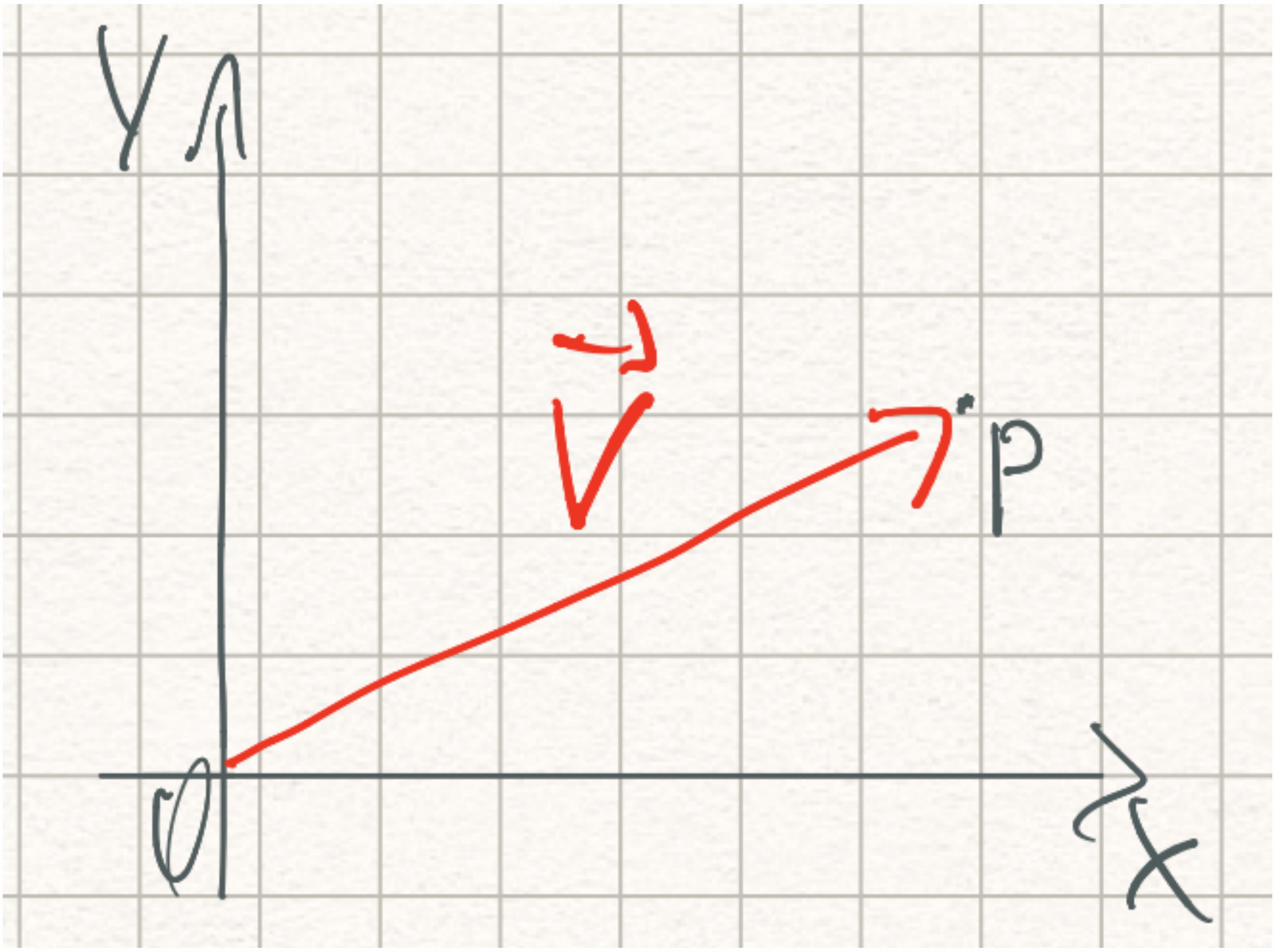


[Corrigir acima: $\psi_\beta \to \psi'_\beta$.]

3. Vetores

3.1. Noções de vetores em variedades

- Em variedades Euclideanas, pode-se dizer que o espaço da variedade e o espaço dos vetores são coincidentes. Estabelecida uma origem para o sistema de coordenadas nessa variedade, um ponto dessa variedade simultaneamente designa um de seus elementos e um vetor.



- Em variedades mais gerais, essa construção não faz sentido.
  Imagine um corpo que se desloca ao longo da superfície de uma esfera S^2 com dada velocidade $\mathbf{V}$.
  Estou considerando que você está imaginando que a esfera está imersa em $\mathbb{R}^3$.
  A noção de vetor velocidade em $\mathbb{R}^3$ nos impõe que esse vetor não está na esfera, mas sim num plano tangente a ela.

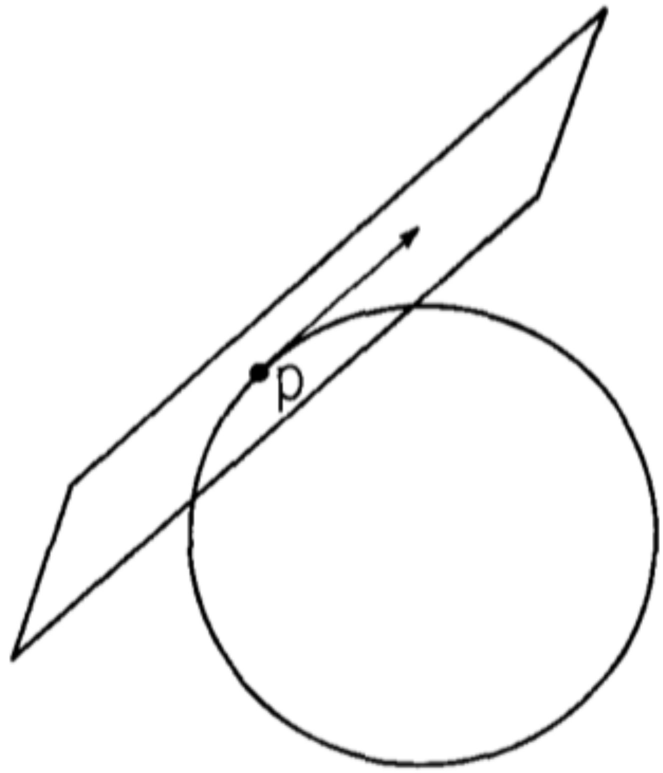


Fig. 2.2. The tangent plane at point p of a sphere in $\mathbb{R}^3$.

- Nota-se que usamos a noção Euclidena de vetor em $\mathbb{R}^3$ para definir um vetor para S^2.
- Há teoremas matemáticos não triviais sobre qual o espaço Euclideano de dimensão mínima que nele pode estar imerso certa variedade. Não precisaremos deles, pois queremos desenvolver uma teoria de vetores em variedades que seja independente do espaço de imersão, se referindo exclusivamente à variedade em si.

3.2. Derivada direcional

- No espaço Euclideano, a derivada na direção $\mathbf{v}$ é dada por $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \sum_i v^i \partial_i$.
- Nota-se que é um mapa de 1 para 1 no sentido de que $\mathbf{v}$ determina a derivada direcional e, conhecendo essa última, encontra-se $\mathbf{v}$.
- Trata-se de um operador linear que satisfaz a regra de Leibnitz.
- Vemos também que esse operador atua num espaço de funções escalares definidas na variedade Euclideana $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definição de vetores tangentes:

Seja $\mathscr{F}$ o espaço das funções C^∞ de M em $\mathbb{R}$. $\mathscr{F}$ inclui campos escalares suaves.
Para dados $f, g \in \mathscr{F}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, o vetor tangente v em um ponto $p \in M$ é um mapa $v : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ que é linear e satisfaz a regra de Leibniz. Ou seja:

1. $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$.
2. $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$.

■

- Algumas observações:

i. Embora seja usual usar negrito para designar vetores no espaço euclidenano, de forma geral não usarei negrito (seguindo o padrão do Wald). Entretando, quando for relevante frisar que estamos tratando de vetores no espaço euclidenao, negrito será utilizado.

ii. No espaço euclideano, normalmente denotamos o vetor por $\mathbf{v} = \sum_i v^i \mathbf{e}_i$ e a derivada direcional por $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \sum_i v^i \partial_i$. Por outro lado, é correto dizer que $\mathbf{v}$ pode ser igualmente representado pela sua derivada direcional, assim $\mathbf{v} \sim \sum_i v^i \partial_i$. Esta abordagem ficará mais clara com o próximo teorema.

iii. A definição acima, embora bem simples, é tudo o que precisamos para tratar de vetores no espaço tangente.

iv. Seguindo o Wald, denotaremos o espaço dos vetores tangentes à variedade M no ponto p por V_p. Esta não é a notação mais comum para esse espaço. O mais usual é T_pM. V_p tem a vantagem de ser uma notação mais leve.

3.3. Base do espaço tangente V_p

Teorema 2.2.1. Se M é variedade n dimensional, então $\dim V_p = n$.

Prova. Considere a figura abaixo, em que $f \in \mathscr{F}$.

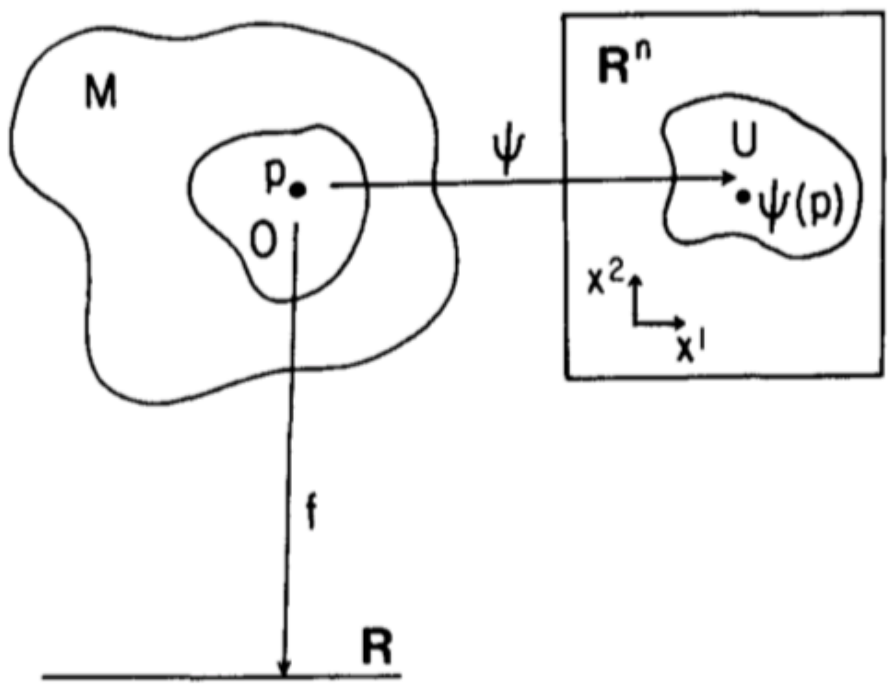


Fig. 2.3. A diagram illustrating the definition of the directional derivatives, X_μ, used in theorem 2.2.1.

Sendo $f \circ \psi^{-1} : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ , podemos introduzir n vetores tangentes em $p \in O \subset M$ (segundo a definição acima) da seguinte forma:

$$X_\mu(f) = \partial_\mu(f \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)}\,. \tag{1}$$

Exercício: Verifique que a definição acima, para cada μ, satisfaz a definição de vetor tangente.

Considerando que X_μ pode atuar em qualquer função $f \in \mathscr{F}$, cada um dos vetores X_μ é LI entre si. -- Para um único f, pode haver dependência linear. Por exemplo, considere o caso em que f é constante, consequentemente $f \circ \psi^{-1}$ é também constante e temos $X_\mu(f) = 0 \;\; \forall \mu$.

Falta demonstrar que os vetores X_μ geram todo o espaço V_p, ou seja, se para quaquer $v \in V_p$ podemos escrever $v = \sum_\mu v^\mu X_\mu$.

Considere primeiro a seguinte relação euclideana, para dados pontos q e p, de coordenadas q^μ e p^μ, e suficientemente próximos (do contrário aparecem termos de derivada segunda),

$$f(q) = f(p) + (q^\mu - p^\mu)\partial_\mu f(q). \tag{2}$$

Acima, estou usando a convenção da soma de Einstein.

Não podemos de imediato usar essa relação pois em princípio nem q^μ, nem p^μ e nem $\partial_\mu f$ não estão definidos.

A ideia é primeiro escrever $f(p)$ como $f \circ \psi^{-1}(\psi(p))$. Esta forma de escrever não é necessária para expressar $f(p)$, mas é relevantepara enteder a derivada. A função a ser avaliada será a $f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no ponto $\psi(p) \in \mathbb{R}^n$.

Notemos também que $\psi(p)$ é ponto em $\mathbb{R}^n$, portanto ele pode ser descrito por qualquer sistema de coordendas em $\mathbb{R}^n$, o cartesiano por exemplo. O Wald denota tais coordendas da seguinte forma: $x^\mu \circ \psi(p)$, aqui vou fazer uma variação mais compacta e usar $\psi^\mu(p)$. As escolhas das posições dos índices até esse momento são arbitrárias (alguns para cima, outros para baixo), só o que não pode é confundir, o que começou sendo definido em cima tem de ficar em cima.

Assim temos,

$$f \circ \psi^{-1}[\psi(q)] = f \circ \psi^{-1}[\psi(p)] + [\psi^\mu(q) - \psi^\mu(p)]\partial_\mu(f \circ \psi^{-1})[\psi(p)]\,, \tag{3}$$

consequentemente,

$$f(q) = f(p) + [\psi^\mu(q) - \psi^\mu(p)]X_\mu(f)\,. \tag{4}$$

O resultado acima pode ser inteiramente entendido interpretando f como um campo escalar num espaço euclideano; rigorosamente $f \circ \psi^{-1}$ é o campo escalar esclideano e este último atua nos pontos $\psi(p) \in \mathbb{R}^n$.

O resultado acima é relevante pois possibilitará expressar $v \in V_p$ como uma combinação linear de X_μ. A saber, numa vizinhança de $p \in M$, sendo p ponto fixado, a atuação de um vetor v sobre f leva a

$$v(f) = v[\psi^\mu(q)]X_\mu(f) + (\psi^\mu(q) - \psi^\mu(p))v[X_\mu(f)]\,. \tag{5}$$

O vetor acima, até o momento, não está fixado como no espaço V_p, só dissemos que ele está atuando em uma f numa vizinhança de p.

Tomando agora $q \to p$, para encontrarmos $v \in V_p$,

$$v(f) = v[\psi^\mu(p)]X_\mu(f) = v^\mu X_\mu(f)\,. \tag{6}$$

Acima definimos $v[\psi^\mu(p)] = v^\mu$, estando implícito que no lado direito que trata-se de componentes de um vetor no ponto p da variedade ($v^\mu \in \mathbb{R}$, $v \in V_p$, $X_\mu \in V_p$).

Em conclusão, mostramos que qualquer vetor $v \in V_p$ pode ser expandido em termos dos vetores $\{X_\mu\}$, consequentemente, $\{X_\mu\}$ não só faz parte, como também gera o espaço V_p. Concluímos que $\dim V_p = n$.

■

3.4. Base coordenada e transformação de componentes de vetores

- A base $\{X_\mu\}$ do espaço V_p é uma base que recebe um nome especial: **base coordenada.**
- Embora a definição original de X_μ seja $X_\mu(f) = \partial_\mu(f \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)}$, nota-se que em essência $X_\mu = \partial_\mu$ (aplicada no ponto p). Isto pois o que ψ faz é transportar as derivadas para o espaço Euclideano, aonde elas estão bem definidas. Por outro lado, uma vez entendido esse transporte, podemos simplesmeste usar $\partial_\mu f|_p$, ou $\partial_\mu f(p)$, no lugar de $\partial_\mu(f \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)}$. Logo, usaremos

$$X_\mu = \partial_\mu \,. \tag{7}$$

- Perante mudanças de coordenadas, vemos que a mudança de base induzida é consequência de uma regra da cadeia, a saber

$$X'_\mu = \partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}X_\nu \tag{8}$$

- Como $v = v^\mu \partial_\mu$, e como v é um objeto geométrico que existe e está determinado independentemente do sistema de coordenadas, vemos que

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \,. \tag{9}$$

Exercício: Verificar diretamente que v é invariante por tranformações de coordenadas.

A equação acima fornece a "lei de transformação dos vetores". Contudo, esse nome é enganoso. O que muda são as *componentes* do vetor, o vetor em si (v) é invariante por transformações de coordenadas.

- Dado que chamamos $\{\partial_\mu\}$ de base coordenada, isto sugere que existam outras bases. Sim, realmente há. A base coordenada tem sua transformação imediatamente induzida pela transformação de coordenadas. Nada impede, porém, de outras tranformações serem realizadas, além da induzida pela mudança de coordenada, e o resultado ser usado como base. Em particular, qualquer combinação linear da base $\{X'_\mu\}$ é também base do mesmo espaço, mas a transformação de coordenadas induz uma base $\{X'_\mu\}$ específica.

Exercício: Desenvolva o exemplo acima para um caso simples: considere um espaço euclideano bidimensional, inicialmente descrito por coordenadas cartesianas. Faça uma rotação. Encontre a relação entre X'_μ e X_μ. Expresse um vetor arbitrário na base orignal $\{X_\mu\}$ e na base final $\{X'_\mu\}$. Expresse o mesmo vetor usando outra base que não seja a base coordenada.

Exercício: Nesta seção vimos uma definição rigorosa de espaço tangente. Mostre que essa definição satisfaz a noção de espaço tangente que vimos com respeito ao exemplo de plano tangente à esfera S^2.

3.5. *Vetores tangentes e curvas na variedade*

Definição: Uma curva suave na variedade M é uma função suave $C : \mathbb{R} \to M$.

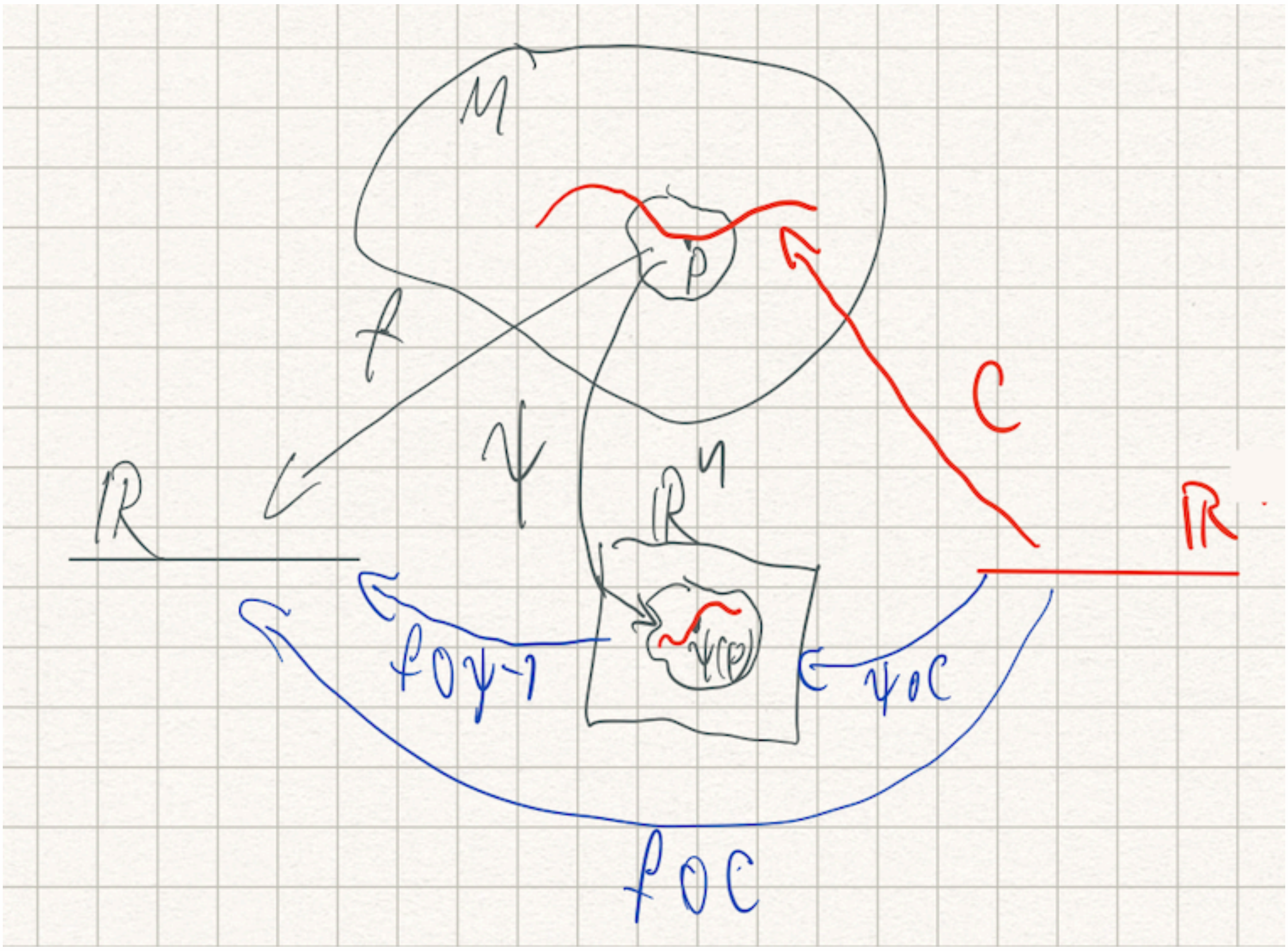
Para cada ponto $p \in C \subset M$, podemos associar um vetor tangente em V_p.

Primeira vejamos o caso euclideano. No espaço euclideano, se a curva C é parametrizada por um parâmetro t real e os pontos da curva são descritos por $x^\mu(t)$, então o vetor tangente à curva (um vetor velocidade, por exemplo) é dado por

$$T = T^\mu \mathbf{e}_\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \mathbf{e}_\mu. \tag{10}$$

Pode-se também usar no espaço euclideano a base ∂_μ, mas não é usual.

Agora passando para o contexto de uma variedade M.



Nota-se que:

- A coordenada da curva C em $\mathbb{R}^n$ é dada por $x^\mu(t) = (\psi \circ C)^\mu(t)$.
- O vetor tangente T deve atuar em funções escalares $f : M \to \mathbb{R}$.
- $f \circ C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Temos então que

$$T(f)(t) = \frac{d}{dt}(f \circ C)(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \psi^{-1})[(\psi \circ C)(t)] = \partial_\mu (f \circ \psi^{-1}) \frac{d(\psi \circ C)^\mu}{dt} = \frac{dx^\mu}{dt} X_\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \partial_\mu \tag{11}$$

O vetor tangente à curva tem a mesma forma do que no caso euclideano, em particular $T^\mu = dx^\mu/dt$, mas x^μ é a rigor dado por $x^\mu = (\psi \circ C)^\mu$.

3.6. *Campo vetorial*

Definimos um vertor $v \in V_p$ como $v : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$.

Podemos definir um campo vetorial para qualquer ponto da variedade, neste caso $v \in V$ e $v : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$.

V, também denotado por TM, é chamado de fibrado tangente e possui dimensão $2n$.

Consequentemente, para $v, w \in V$, pode-se considerar a composição $v(w(f)) = (v \circ w)(f)$, assim como o seguinte comutador:

$$[v, w](f) = (v \circ w - w \circ v)(f). \tag{12}$$

Este comudator terá especial relevância mais tarde, quando tratarmos de curvatura de uma variedade.

3.7. *Grupo de um parâmetro de difeomorfismos*

Para dado t fixo, seja $\phi_t : M \to M$ um difeomorfismo.

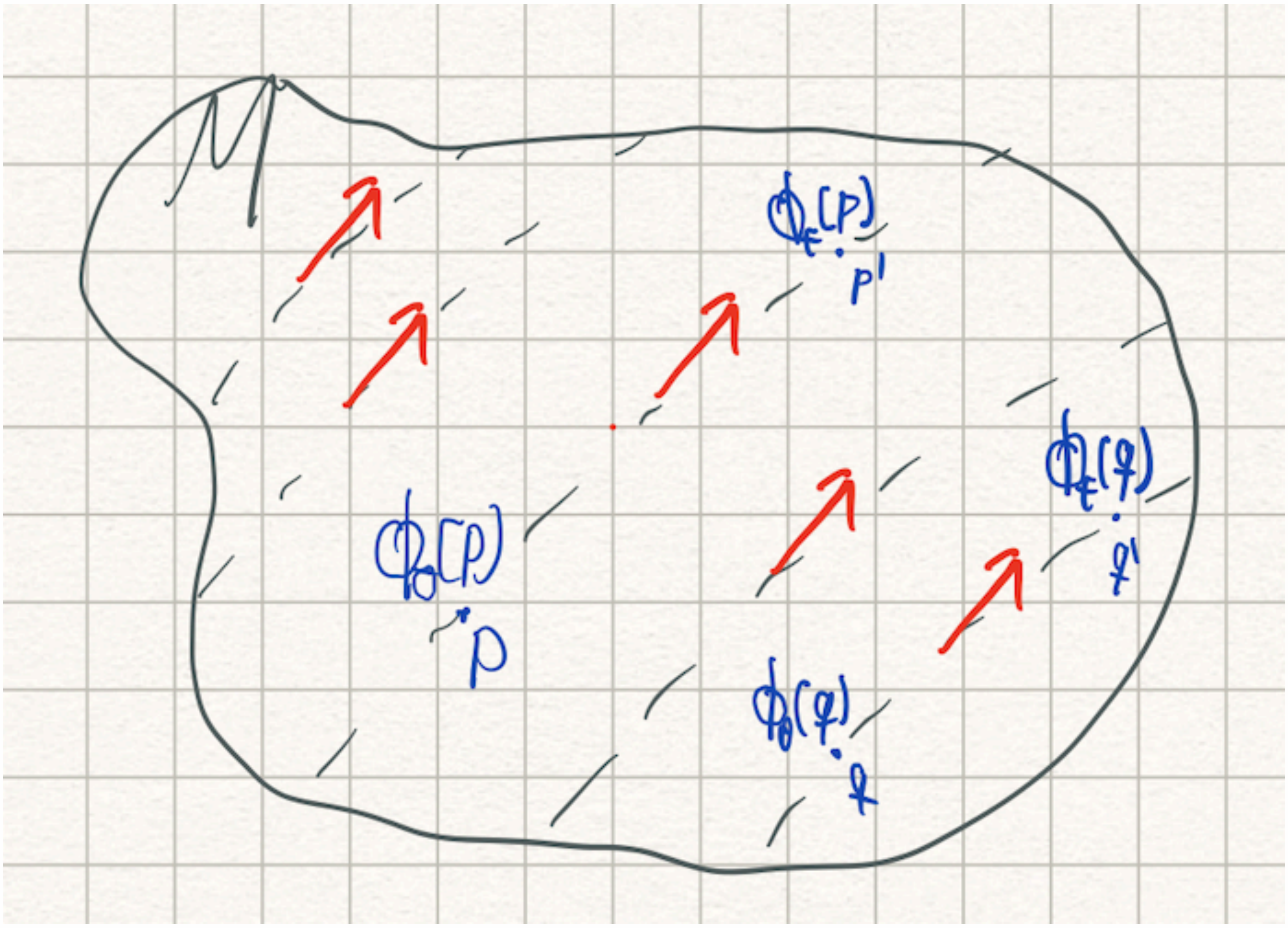
Se para qualquer $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t : \mathbb{R} \times M \to M$ for um difeomorfismo e se a seguinte composição for válida $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{t+s}$, então ϕ_t forma um **grupo de um parâmetro de difeomorfismos**.

O elemento identidade é usualmente associado a $t = 0$, isto é, ϕ_0 seria o elemento identidade do grupo.

Grupos de um parâmetro de difeomorfismos determinam uma curva em M para cada ponto $p \in M$. A saber, para p fixo, $\phi_t(p) : \mathbb{R} \to M$. Essas curvas são chamadas de órbitas de ϕ_t.

Consequentemente, grupos de um parâmetro de difeomorfismos determinam um campo vetorial $v \in V$.

Reciprocamente, um campo vetorial $v \in V$ determina curvas integrais, ou seja, uma classe de curvas em M tais que somente uma curva passe em cada ponto $p \in M$ e com vetor tangente dado por $v|_p \in V_p$.



Exercício: ver problema 3 do Wald.

Este conceito de grupo de um parâmetro de difeomorfismos tem várias aplicações. O Wald usa ele com frequência mais para frente no livro.

3.8. Vetores no espaço cotangente

Lembremos que definimos vetores em dado ponto p da variedade como aplicações $v : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ que são lineares e satisfazem a regra de Leibniz. Estes são os elementos do espaço tangente V_p. Ou, se não fixarmos o ponto p, temos $v : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ que são elementos do fibrado tangente V.

Semelhantemente ao que talvez vocês devem ter visto em álgebra linear II na graduação (matéria que certamente vocês se lembram em detalhes, como se tivessem concluído ela ontem); para todo espaço vetorial V_p é possível definir um espaço dual V_p^*, tal que, se $v^* \in V_p^*$, então $v^* : V \to \mathbb{R}$ e v^* é mapa linear.

Uma base para V^* pode ser construída a partir de uma base de V a partir da seguinte relação:

$$v^{*\mu}(v_\nu) = \delta^\mu_\nu \,. \tag{13}$$

Acima, v_ν denota elemento da base de V. Se usássemos ∂_ν estaríamos nos referindo à base coordenada. Essa relação define a base $\{v^{*\mu}\}$ de V^*. Evidentemente, $\dim V = \dim V^*$.

Exercício: fazer exerício 6 do Wald.

O espaço V_p^* é chamado de espaço dual a V_p, ou espaço dos covetores, ou espaço cotangente. É comumente denotado por T_p^*M. O fibrado cotangente é denotado por V^* ou T^*M.

Poderíamos construir um espaço ``co-cotangente'' V_p^{**} ? Repetindo a regra anterior teríamos que elementos de V_p^{**} satisfazem $v^{**} : V^* \to \mathbb{R}$. Contudo, a própria definição de base de V_p^* já mostra claramente que elementos de V já satisfazem todas as propriedades de V^{**}. Logo não há nada de novo em V^{**} e podemos considerar $V = V^{**}$. Com essa discussão, ganhamos uma forma diferente de interpretar os vetores, a saber, eles também podem ser vistos como $v : V^* \to \mathbb{R}$.

4. Tensores

4.1. Definição geral

- Um tensor do tipo (k, l) numa variedade M de espaço tangente V_p em $p \in M$ é um mapa multilienar dado por

$$T : V_p^* \times ..(k \text{ vezes}).. \times V_p^* \times V_p \times ..(l \text{ vezes}).. \times V_p \to \mathbb{R} \tag{14}$$

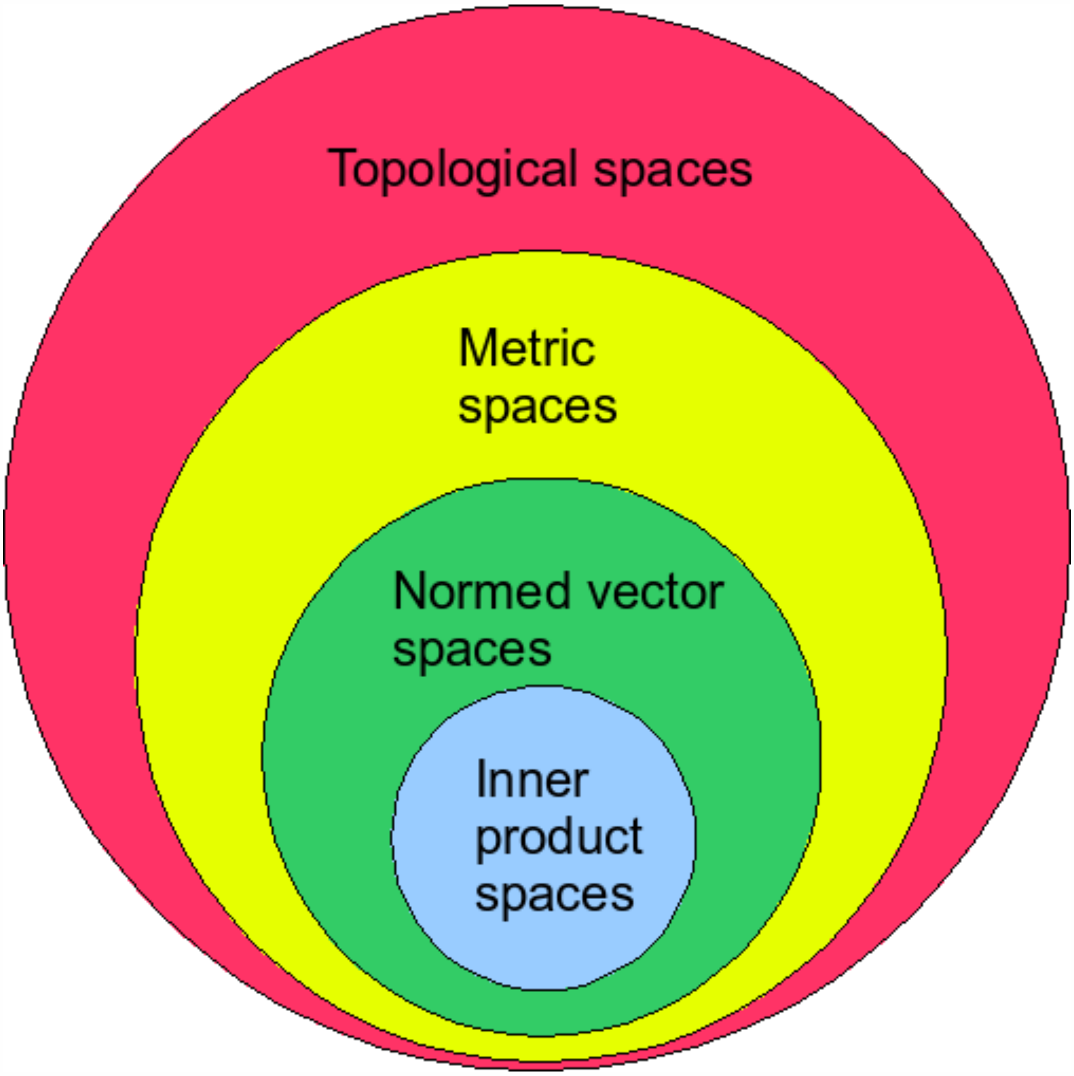
- Dizemos que $T \in \mathscr{T}_p(k, l)$ e nota-se que $\dim \mathscr{T}_p(k, l) = n^{k+l}$.
- **Produto tensorial ou externo**: Devido à linearidade dos tensores, dados dois tensores T e T', de tipos (k, l) e (k', l'), é imediata a construção de um terceiro tensor de tipo $(k + k', l + l')$ por meio do produto $\otimes$. Nota: não confundir produto externo (*outer*) com produto exterior (*exterior/wedge*).
- Consequentemente, podemos expressar qualquer tensor em função de produtos tensoriais de elementes da de V ou da de V^*.
- Sejam $\{v_i\}_{i=1}^n$ e $\{v^{*i}\}_{i=1}^n$ bases de V e V^* respectivamente. Como i assume n valores, podemos usar o índice μ no lugar, mas nota-se que aqui cada valor de μ é um vetor, não uma componente. O um tensor T qualquer pode então ser expresso por

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \ldots \otimes v^{*\nu_l}. \tag{15}$$

- Acima, as bases usadas são arbitrárias. Para o caso específico das bases coordenadas de V e V^*, basta substituir $v_\mu \to \partial_\mu$ e $v^{*\nu} \to dx^\nu$, em que, *por definição*, $\partial_\mu(dx^\nu) = dx^\nu(\partial_\mu) = \delta^\mu_\nu$.
- O uso dessa notação para os elementos das bases são em parte motivadas pelas suas leis de transformação.
- Vetores de V_p são chamados de vetores **contravariantes**. Vetores de V_p^* são **covariantes**.

4.2. Métrica

- Não entramos em detalhes sobre espaços topológicos, métricos ou normados. A introdução de uma métrica, no sentido comumente usado em geometria diferencial ou cálculo tensorial, equivale a introduzir um *produto interno*.



(https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=106915006)

- Espaços topológicos são conceitos muito amplos; em essência são meros conjuntos munidos de definições sobre o que seriam seus subconjuntos abertos. Espaços métricos introduzem o conceito de distância entre dos elementos do conjunto (surge aqui a desigualdade triangular). Espaços normados introduzem a noção de que os elementos de dado conjunto podem possuir tamanho. E por fim, espaços com produto interno possibilitam a comparação das "semelhanças" entre dois elementos, introduzem uma noção de ângulo.
- Variedades em geral não precisam ter métrica (ou produto interno), mas iremos considerar de agora em diante somente variedades com métrica.
- Vamos denotar o produto interno entre dois vetores $v_1, v_2 \in V_p$ por $g(v_1, v_2)$. Outra notação usual é $\langle v_1, v_2 \rangle$, ou $\langle v_1 | v_2 \rangle$.
- Para dados $v_1, v_2, v_3 \in V_p$ e $a, b \in \mathbb{R}$, o produto interno em um corpo real é definido por:

> 1. $g(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$;
> 2. Linear: $g(v_1, v_2 + av_3) = g(v_1, v_2) + ag(v_1, v_3)$;
> 3. Simétrico: $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$;
> 4. Não degenerado: Se $g(v_1, v_2) = 0 \ \forall v_2$, então $v_1 = 0$.

A definição acima é essencial para geometria pseudo-Riemanniana. Contudo, é bom lembrar que a definição mais usual de produto interno (também usada na MQ) substitui o item 4 acima pelo seguite: $g(v_1, v_1) \geq 0$, sendo válida a igualdade somente se $v_1 = 0$. Esta última induz a noção de norma usual (através de $||v_1||^2 = g(v_1, v_1)$). Em espaços de Minkowski, por exemplo, existem duas noções de vetor nulo: o (verdadeiro) vetor nulo cujas todas componentes são nulas (este é o vetor cujo produto interno com qualquer outro é sempre zero) e o vetor cuja norma é nula (vetor tipo luz).

- A junção das propriedades 2 e 3 acima implica que o produto interno é bilinear.
- Definimos métrica como $g = g(\cdot, \cdot)$.
- Pela definição, propriedades 1 e 2, vemos que a métrica é tensor do tipo (0,2), logo pode ser expressa por

$$g = g_{\mu\nu} dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}. \tag{16}$$

- **Exercício**: mostre que o item 4 da definição do produto interno impõe que $\det (g_{\mu\nu}) \neq 0$.
- Como todo produto interno induz uma norma, que induz o conceito de distância, a métrica induz naturalmente uma noção de distância.
- Deve-se notar que já tínhamos antes da métrica alguma noção de distância, que veio de deslocamentos infinitesimais e do mapa local com o espaço Euclideano. Essas noções eram só tratadas localmente. A métrica fornece como a noção de distância varia ponto a ponto da variedade. Dados pontos $p, q \in M$, a distância é dada por uma integral de g ao longo de um caminho entre p e q. Localmente, estamos calculando deslocamentos infinitesimais na variedade, localmente podemos considerar que estamos em espaços Euclidenaos, mas cada um deles possui diferentes normalizações. Por isso, é também correto expressar

$$ds^2 = g = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{17}$$

Acima, o produto tensorial foi omitido.

- Dada uma base, é um exercício de álgebra linear mostrar que sempre é possível ortonormalizá-la. Devido à condição 4 na definição do produto interno, a normalização contudo nem sempre será positiva.
- **Exercício:** Para uma variedade bidimensional em um ponto p, mostre que sempre é possível encontrar uma base tal que as componentes da métrica sejam descritas pela matriz (os sinais de mais e menos são independentes abaixo)

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

■

- **Exercício** Mostre que existe um mapa bijetivo entre elementos de V e os elementos de V^*.

Devido ao mapa acima, qualquer tensor do tipo (k, l) pode ser trivialmente mapeado em um do tipo $(0, k + l)$, por exemplo. Assim, em espaços métricos o *rank* (posto) do tensor, dado por $k + l$, é mais relevante do que a especificação (k, l).

5. Índices abstratos

A notação de tensores com índices abstratos não é a notação mais usual que encontramos em artigos, mas talvez você já tenha se deparado com ela sem perceber que esta notação estava sendo usada.

Sob o ponto de vista de princípios geométricos, em princípio o mais natural seria fazermos todos os cálculos com os tensores em si, ao invés de usar as componentes. Semelhantemente, o uso de vetores (ao invés de componentes de vetores) em muito ajudou no entendimento da eletrodinâmica; e computacionalmente, há muitas passagens que são mais fáceis de serem compreendidas usando os vetores em si, ao invés de suas componentes.

Na prática, como todos vocês já tiveram algum contato com relatividade geral, vemos que grande parte das contas tratam de componentes de tensores, não dos tensores em si. Por exemplo, a eq. de Einstein é comumente escrita na forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \,, \tag{19}$$

e o tensor de Ricci é obtido pelo tensor de Riemann a partir de

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \,. \tag{20}$$

Acima coloquei o somatório para deixar explícito que a eq. acima só faz sentido com esse somatório.

Pensando nos tensores em si, é fácil escrever a eq. de Einstein da seguinte forma

$$G = 8\pi T \,. \tag{21}$$

A vantagem desta forma é não fazer menção a qualquer base de coordenadas explicitamente, fazendo referência direta aos tensorem em si. Contudo, para o tensor de Ricci, assim como para o traço do tensor energia momento, precisaríamos de uma nova notação. A situação fica mais complicada ao tratar da contração de tensores arbitrários. Por exemplo, se A for tensor do tipo (k, l) e B do tipo $(l-1, m)$, como indicar a contração de $l-1$ índices de A com $l-1$ índices de B? É ainda importante especificar quais índices estão sendo contraídos, o primeiro de A pode ser contraído com o terceiro de B, por exemplo. Assim, é claro que a notação sem índices é facilmente aplicada para vetores no contexto da eletrodinâmica, mas não é evidente como aplicá-la para tensores de forma geral.

Uma saída bem simples para esse problema foi feita por Penrose, que propôs a notação com índices abstratos. O Wald usa largamente esta notação.

A ideia é muito simples, usa-se índices para indicar o tipo do tensor, ao invés de indicar as componentes. Para deixar claro que esses índices não tratam de componentes, usa-se letras $a, b, c \ldots$ ao invés de $\mu, \nu, \ldots$. Ou seja, um tensor do tipo $(1, 2)$ é simplesmente denotado por A^a_{bc}. A contração de seu índice contravariante com um covariante é denotada por A^a_{ab}. Contudo, há nessa expressão uma relevante distinção entre o caso com componentes: não há uma soma implícita em a, a é um índice abstrato, simplesmente está lá para indicar uma contração. Ou seja, dado um sistema de coordendas, as componentes de A são denotadas por $A^{\mu}_{\lambda\nu}$ e a contração é dada por

$$\sum_{\mu} A^{\mu}_{\mu\nu} = (A^a_{ab})_{\nu} \,. \tag{22}$$

O ν no lado direito indica a componente ν do tensor A^a_{ab} (nota-se que A^a_{ab} é vetor covariante).

Tal como usual, e vocês já devem saber disso, as componentes da inversa da métrica g são denotadas por $g^{\mu\nu}$. O tensor que é a inversa da métrica não tem um símbolo novo padrão, mas pode ser expresso por g^{ab}. Note que no último caso estamos nos referindo ao tensor inverso, não a componentes.

Sobre a altura dos índices e a distinção entre covetores e vetores, usaremo o seguinte: um vetor $A^a \in V$ é denotado por

$$A^a = \sum_{\mu} A^{\mu}\partial_{\mu} = A^{\mu}\partial_{\mu} \in V \,. \tag{23}$$

Acima indicamos o uso da convenção de Einstein, a qual iremos usar eventualmente. O Wald não usa.

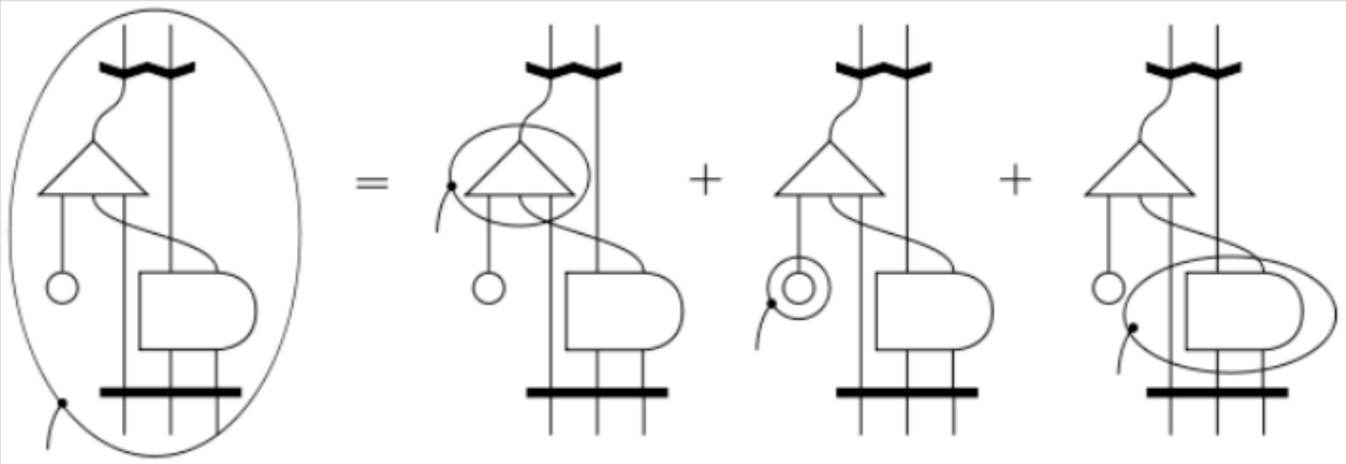
Com a convenção acima, deve-se ter cuidado ao tratar da base. Se B^a coincide com o vetor dado por ∂_1, em certo sistema de coordenadas, então $B^a \doteq \partial_1$. Está correta a associação de índice em cima à esquerda e índice embaixo à direita.

Um tensor A de tipo $(2, 1)$ satisfaz $A : V^* \times V \times V \to \mathbb{R}$. Logo, a combinação desse tensor com g^{ab} e um covetor v_a é um escalar, qual é denotado por

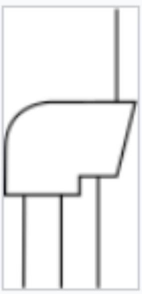
$$A^a_{bc}(v_d, g^{ef}) = A^a_{bc} v_a g^{bc} = A^{a\ \ b}_{\ b} v_a \tag{24}$$

Por curiosidade, Penrose foi além em termos de notação e desenvolveu uma notação própria a partir de diagramas. Essa notação por diagramas de Penrose é bem mais rara de ser usada, mas tem suas aplicações e pode ser relevante. O artigo em que ele introduziu essa notação está em https://www.mscs.dal.ca/~selinger/papers/graphical-bib/public/Penrose-applications-of-negative-dimensional-tensors.pdf (Applications of negative dimensional tensors). Uma explicação sucinta pode ser vista em https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_graphical_notation

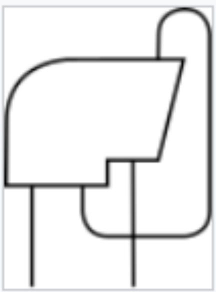
Exemplos da Wikipedia:



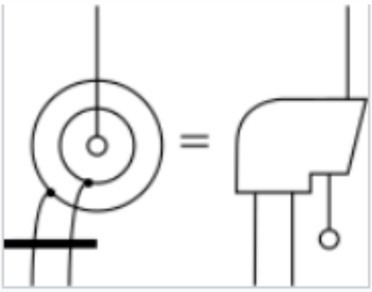
covariant derivative $12\nabla_a\left(\xi^f \lambda^{(d}_{fb[c} D^{e)b}_{gh]}\right)$
$= 12\left(\xi^f (\nabla_a \lambda^{(d}_{fb[c}) D^{e)b}_{gh]} + (\nabla_a \xi^f) \lambda^{(d}_{fb[c} D^{e)b}_{gh]} + \xi^f \lambda^{(d}_{fb[c} (\nabla_a D^{e)b}_{gh]})\right)$



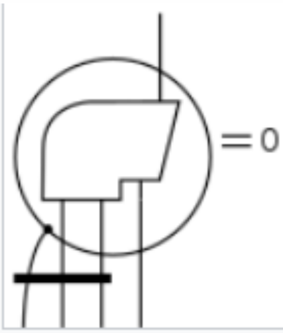
Notation for the Riemann curvature tensor



Ricci tensor
$R_{ab} = R_{acb}{}^{c}$



Ricci identity
$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\, \xi^d = R_{abc}{}^{d}\, \xi^c$



Bianchi identity
$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e} = 0$

Não vamos usar essa notaçao gráfica de Penrose, mas talvez alguém aqui goste de trabalhar com ela...

- **Exercícios**: Exercícios do Wald: 4 e 8.