Parte 2 - Curvatura

Curso de Relatividade Geral I

Prof.: Davi C. Rodrigues

PPGCosmo, semestre 2021/2, 2022/2

Página da disciplina: https://www.davi.cosmo-ufes.org/rg2021.html

Parte 2 - Curvatura
- Derivada covariante
- Transporte paralelo
- A conexão e a métrica: compatibilidade
- Variedades riemannianas e variedades euclideanas
- Curvatura e o tensor de Riemann
  - Breve comentário sobre simetrização e anti-simetrização
  - Propriedades do tensor de Riemann
  - Tensor de Ricci, escalar de Ricci e tensor de Einstein
  - Por que Einstein buscou por um tensor com divergência nula?
  - Tensor de Weyl
- Geodésicas
- Métodos para calcular a curvatura
- Outros exercícios

Derivada covariante

Queremos definir a atuação de derivadas em tensores, será útil termos uma definição de derivada cuja atuação gere um tensor. Num primeiro momento, vamos exigir que essa derivada tenha 5 propriedades mínimas. Veremos depois o que falta para garantir que essa derivada gere um tensor.

Para dados A e B tensores de mesmo tipo, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}$ operador de contração:

> 1. Linearidade: $\nabla(A + \alpha B) = \nabla A + \alpha \nabla B$.
> 2. Regra de Leibnitz: $\nabla(AB) = A\nabla B + (\nabla A)B$.
> 3. Comutatividade com contração: $\nabla(\mathcal{C}A) = \mathcal{C}(\nabla A)$.
> 4. Para todo $f \in \mathscr{F}$ e para todo $t^a \in V_p$, $t(f) = t^a \nabla_a f$.
> 5. Para todo $f \in \mathscr{F}$, $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$.
>   Esta condição é o mesmo que exigir ausência de torção, logo teorias com torção violam esta quinta condição.

- **Exercício**: Acima espero um entendimento intuitivo sobre $\mathcal{C}$. Peço aqui para definir o operador de contração $\mathcal{C}$ sem particularizar um sistema de coordenada, deixando claro o domínio e a imagem do operador.

- As propriedades 4 e 5 acima são suficientes para encontrar que (mostre!):

$$[v, w](f) = (v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b)\nabla_b f\,. \tag{1}$$

  Assim, definimos $[v, w]^b = v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b$.

- (SKIP) **Exercício**: Consideremos dois operadores diferenciais ∇ e $\tilde{\nabla}$, ambos satisfazem todas as propriedades que definem derivadas covariantes. Assim $\nabla_a w_b$ e $\tilde{\nabla}_a w_b$ em princípio são diferentes tensores e vão depender do comportamento de w_b numa vizinhança do ponto p. Mostre que a diferença $\tilde{\nabla}_a w_b - \nabla_a w_b$ só depende do valor de w_b no ponto p.

Caso $\tilde{\nabla}_a w_b - \nabla_a w_b$ dependense do comportamento de ω_b numa vizinhança de p, não poderíamos dizer que $\tilde{\nabla} - \nabla$ é tensor. Tensores são definidos a partir de espaços (co)tangentes num ponto, não numa vizinhança.

Notemos que $(\tilde{\nabla} - \nabla) : V_p^* \to V_p^* \times V_p^*$ é linear. Ou seja, $(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b$ é um tensor do tipo $(0, 2)$ linear em ω_a. Consequentemente, podemos garantir que $\tilde{\nabla}_a \omega_b$ e $\nabla_a \omega_b$ são tensores, e podemos escrever,

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b = -C^c_{ab}\omega_c\,, \tag{2}$$

em que C^a_{bc} é um tensor.

- **Exercício**: Devido à ausência de torção, mostre que $C^c_{ab} = C^c_{ba}$.

Usando a regra de Leibniz, a atuação num tensor arbitrário pode ser determinada como sendo

$$\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} = \tilde{\nabla}_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} + \sum_i C^{b_i}{}_{ad} T^{b_1\cdots d\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} - \sum_j C^d{}_{ac_j} T^{b_1\cdots b_l}{}_{c_1\cdots d\cdots c_l}\,. \tag{3.1.14}$$

Dado que uma derivada parcial ordinária satisfaz os requisitos para ser ∇, tomemos $\tilde{\nabla}_a = \partial_a$. Isto levará a um particular caso de C^c_{ab}, o qual denotamos por Γ^c_{ab}. Assim, em particular,

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b_{ac} t^c\,. \tag{3}$$

Γ é chamado de símbolo de Christofell. Comumente, ele não é interpretado como sendo um tensor, contudo vemos que neste contexto faz sentido vê-lo como tal. Há uma sutileza importante: ao efetuar uma mudança de coordenadas, ∂_a muda, e portanto o tensor C^c_{ab} muda (deixando de ser Γ). Ou seja, ao fazer uma mudança de coordenadas na expressão acima, embora Γ (assim como C) seja formalmente um tensor, uma mudança de coordenadas não leva a uma mudança de Γ compatível com essas coordenadas, pois essa mudança muda o tensor em si. Esta interpretação para Γ como tensor só é possível pois não definimos tensores a partir de regras de transformação, mas sim como aplicações multilineares de espaços (co)tangentes. Sob o enfoque de regra de transformação tensorial, Γ não pode ser um tensor. Uma forma explícita para Γ iremos ver depois. Deve estar claro que para determinar Γ precisamos de mais informação: isto é, ou Γ é dado como parte da definição da variedade explicitamente, ou um tipo particupar de geometria é escolhido, de tal forma que Γ possa ser determinado a partir de outras propriedades (a partir da métrica em particular, como veremos).

Se Γ for conhecido, podemos determinar ∇. Em geral, Γ é uma grandeza independente, sua definição faz parte da definição das propriedades da variedade. Na geometria Riemaniana, há uma relação entre Γ e a métrica. Iremos definir geometria Riemaniana depois.

Transporte paralelo

No espaço euclideano, se um vetor v^a não se altera ao longo de uma curva C parametrizada por τ, então

$$\frac{dv^a}{d\tau} = 0\,, \tag{4}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dx^b}{d\tau}\partial_b v^a = t^b \partial_b v^a = 0. \tag{5}$$

Um transporte paralelo, considerando uma noção intuitiva euclideana, poderia ser imaginado como devido à seguinte equação:

$$t^b \partial_b v^a = \lambda v^a\,. \tag{6}$$

Em que λ é nulo se a norma não se altera. Por definição, define-se transporte paralelo sem consideração à mudanças da norma (ou seja, $\lambda = 0$). São dois os motivos: simplifica e rigorosamente não há perda de generalidade, pois é possível reparametrizar a curva de tal forma que $\lambda = 0$, mas veremos isso depois.

Considerando as expressões acima para o espaço euclideano, e considerando a definição de derivada covariante, é natural definirmos um transporte paralelo infinitesimal em uma variedade, e ao longo de uma curva C de vetor tangente t^a, da seguinte forma:

$$t^a \nabla_a v^b = t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma^b_{ac} v^c = 0\,. \tag{7}$$

Nota-se que estamos usando a mesma forma da expressão euclideana, mas com $\partial \to \nabla$, e o vetor tangente t^a é rigorosamente pela expressão que vimos antes (cuja forma é a mesma do caso euclidenano, verifique!).

Embora rigorosamente só tenhamos tratado de deslocamentos infinitesimais, em princípio, nada impede de estendermos a noção anterior para deslocamentos arbitrários, tudo o que é necessário é integrar apropriadamente a expressão anterior ao longo de quaisquer pontos da curva C.

Ademais, independentemente dos deslocamentos serem infinitesimais ou finitos, o conceito de transporte paralelo possibilita relacionar elementos de V_p em elementos de V_q, em que $p, q \in C \subset M$. A saber, podemos começar com um elemento de V_p e transportá-lo, ao longo de C, até um elemento de V_q. No espaço euclidenao isso é trivial, pois todos os espaços tangentes são equivalentes, mas não é trivial no contexto de variedades. No espaço euclideano (e usando coordenadas cartesianas), esse transporte paralelo é feito com a derivada parcial. De forma geral, precisaremos conehcer Γ para ser possível fazer o mapa $V_p \to V_q$.

A conexão e a métrica: compatibilidade

A conexão C^a_{bc} é uma informação adicional da variedade. Um caso de particular interesse é aquele em que a conexão pode ser determinada a partir da métrica. Neste caso, fixada a métrica da variedade, C^a_{bc} estaria também determinada.

Vamos usar a seguinte relação, comumente referida como **equação de compatibilidade** entre a métrica e a derivada covariante:

$$\nabla_a g_{bc} = 0\,. \tag{8}$$

Uma consequência imediata desta relação (que também pode ser vista como uma motivação para ela) é que a norma de um vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva é preservada. A saber, se $t^a \nabla_a v^b = 0$, então $t^a \nabla_a (g_{bc} v^b v^c)$ =0.

Exercício: Prove que a compatibilidade da métrica com a derivada covariante é suficiente para determinar de forma única a conexão como sendo

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d}) \,. \tag{9}$$

Lembrar que o símbolo de Cristofell, como acima dado, é um caso particular de conexão afim.

Variedades riemannianas e variedades euclideanas

Sugiro uma breve leitura do capítulo 7 do livro do Plebansky. Acho ele especialente claro nesse ponto.

Já vi algumas pequenas variações de definição, estou seguindo o Plebansky neste ponto:

> Uma variedade riemanniana é uma variedade diferenciável munida de uma métrica e de uma conexão afim, sendo esta última compatível com a métrica e sem torção.

Uma variedade euclideana é um caso particular de variedade riemanniana para a qual há um sistema de coordendas em que a matriz que representa a métrica é a matriz identidade. Esse sistema de coordenadas é chamado de cartesiano (ou sistema canônico do espaço euclideano). Consequentemente, no sistema de coordenadas cartesianas, o símbolo de Christofell é nulo.

Para o espaço de Minkowski (espaço pseudo-euclideano), há um sistema de coordenadas chamado de canônico no qual a matriz que representa a métrica é uma matriz identidade, mas com um dos sinais na diagonal trocado. O símbolo de Christofell nesse sistema de coordenadas especial é nulo.

Exercício: No espaço euclidenano bidimensional, calcule o símbolo de Cristofell para coordenadas polares. Lembrete/dica: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$.

Exercício: No espaço euclidenano tridimensional, calcule o símbolo de Cristofell para coordenadas esféricas.

Exercício: Depois de ter feito à mão os exercícios acima, repita os cálculos usando algum código apropriado.

Sugestões no Mathemática:

1. Pacote mais completo (conjunto de pacotes): procure por xact no google.
2. Pacote simples que eu fiz (FTeV):
   i. Instalação: Abra um notebook do mathematica, copie e cole o seguinte (o objetivo é baixar e instalar um pacote que coloquei nesse endereço):

```
PacletInstall["https://13701821-480806821692205589.preview.editmysite.com/uploads/1/3/7/0/13701821/fgev-0.12.paclet"]
```

ii. Ao executar com shift+enter, uma mensagem de que o pacote foi instalado deve aparecer.
iii. Para exemplos de uso, ver os notebooks que enviei.
iv. Estou para fazer o upload dele no github e fazer uma documentação básica há um tempo. Espero em breve fazer...

Curvatura e o tensor de Riemann

Exercício: Mostre que, na geometria euclideana, o transporte paralelo de um vetor ao longo de qualquer caminho fechado leva ao próprio vetor de origem.

Já vimos que $(\nabla_a - \tilde{\nabla}_a)\omega_b$ depende do valor de ω_b num ponto, não numa vizinhança, o que levou à identificação de que $(\nabla_a - \tilde{\nabla}_a)\omega_b$ é tensor de tipo (0,2).

Mostra-se diretamente que (verifique!), para qualquer função escalar f,

$$[\nabla_a, \nabla_b](f\omega_c) = f[\nabla_a, \nabla_b]\omega_c \,. \tag{10}$$

Consequentemente, como f é arbitrário, $[\nabla_a, \nabla_b]\omega_c$ é tensor de tipo (0,3), além de ser explicitamente linear em ω_c. Consequentemente, sem perda de generalidade podemos introduzir um tensor, chamado tensor de Rieamann*, R^a_{bcd} da seguinte forma:

$$[\nabla_a, \nabla_b]\omega_c = R_{abc}{}^d\omega_d \,. \tag{11}$$

Por construção, nota-se que $R_{abc}{}^d = R_{[ab]c}{}^d$, isto é, o tensor de Riemann é anti-simetrico em seus dois primeiros índices.

A partir de $[\nabla_a, \nabla_b](t^c\omega_c) = 0$, verifica-se diretamente que,

$$[\nabla_a, \nabla_b]t^c = R_{abd}{}^c t^d \,. \tag{12}$$

Pode-se ainda estender a regra anterior para um tensor arbitrário, o resultado é

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l} = -\sum_{i=1}^{k} R_{abe}{}^{c_i}T^{c_1\cdots e\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l} + \sum_{j=1}^{l} R_{abd_j}{}^{e}T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots e\cdots d_l} \,.$$

Exercíco: Mostre que o transporte paralelo ao longo de um caminho fechado sempre leva a um vetor final igual ao vetor de início se o tensor de Riemann for nulo. De forma geral, a mudança de orientação do vetor é propocional ao tensor de Riemann (ver eq. 3.2.9 do Wald).

Breve comentário sobre simetrização e anti-simetrização

Três definições largamente usadas, para qualquer tensor A_{ab}:

- $A_{(ab)} \equiv \frac{1}{2}(A_{ab} + A_{ba})$
- $A_{[ab]} \equiv \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba})$
- $B_{[abc]} \equiv \frac{1}{3!}(B_{abc} + B_{bca} + B_{cab} - B_{bac} - B_{acb} - B_{cba})$

O mesmo pode ser usado para tensores de posto superior.

Um resultado muito simples e muito importante: Qualquer tensor de posto 2 pode ser decomposto na soma de um tensor simétrico com outro anti-simétrico.

Verificação: Note que $A_{ab} = A_{(ab)} + A_{[ba]}$. Isto prova a afirmatica acima.

Existe uma análogo do resultado acima que se aplica a matrizes quadradas arbitrárias. É imediata a adaptação.

Propriedades do tensor de Riemann

Propriedades do tensor de Riemann:

1. $R_{(ab)cd} = 0$.
2. $R_{ab(cd)} = 0$.
3. $R_{[abc]d} = 0$. (Primeira identidade de Bianchi)
4. $R_{abcd} = R_{cdab}$.
5. $\nabla_{[a}R_{bc]de} = 0$. (Segunda identidade de Bianchi).

Exercício: É comum definir o tensor de Riemann através de $[\nabla_a, \nabla_b]t^c = R^c_{dab}t^d$. Use as propriedades acima para mostrar a equivalência.

Exercício: O livro do Weinberg de gravitação é um clássico, mas usa uma definição peculiar para o tensor de Riemann. Encontre a definição e verifique qual a diferença com respeito à definição que estamos adotando.

Exercício: Demonstre as 5 propriedades acima.

Tensor de Ricci, escalar de Ricci e tensor de Einstein

Def.: Tensor de Ricci é definido por $R_{ab} \equiv R_{acb}{}^{c} = R^{c}{}_{acb}$ (verifique a última igualdade). Nota-se que $R_{ab} = R_{ba}$.

Def.: O escalar de Ricci é definido por $R \equiv g^{ab}R_{ab}$.

Usando a (segunda) identidade de Bianchi, encontra-se que

$$0 = g^{ae}\nabla_{[a}R_{bc]de} = \nabla_a R_{bcd}{}^{a} + \nabla_b R_{dc} - \nabla_c R_{bc} \tag{13}$$

Exercício: Verificar a eq. acima.

E conclui-se que, após contrair os índices d e b,

$$\nabla^a(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}) = 0. \tag{14}$$

Que é serve de motivação para definir o tensor de Einstein,

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}\,. \tag{15}$$

Cabe comentar que o tensor de Einstein é às vezes empregado num contexto puramente geométrico/matemático, não necessariamente associado à equação de Einstein.

Por que Einstein buscou por um tensor com divergência nula?

Veremos mais detalhes sobre a eq. de Einstein depois. A primeira versão da eq. de campo para a relatividade geral tinha o que Einstein desejava de início: uma equação dinâmica, com duas derivadas, para a geometria e sua ligação com a matéria, via tensor de energia-momento. A saber,

$$R_{ab} \propto T_{ab} \,. \tag{16}$$

Ocorre que em qualquer abordagem usual o tensor energia momento é conservardo no espaço plano, ou seja, $\partial^a T_{ab} = 0$. Em particular, pode-se mostra que sua conservação no espaço plano é consequência do teorema de Noether aplicado a translações e rotações no espaço-tempo. No caso de gravitação, a extensão natural para a relação anterior, compatível com grandezas tensoriais, é $\nabla^a T_{ab} = 0$. Mode-se mostrar, e uma apêndice do Wald mostra isso com clareza, que $\nabla^a T_{ab} = 0$ é necessário para qualquer teoria expressa de forma independente de coordenadas e tal que as equações de campo possam ser separadas em uma parte de matéria mais uma parte de gravitação (rigorosamente é uma ação de matéria mais uma ação de gravitação).

Enfim, assumindo que $\nabla^a T_{ab}$, da eq. de campo anterior temos $\nabla^a R_{ab} = 0$, que é uma equação dinâmica para a geometria. Essa equação deveria ser satisfeita sempre, que por sua vez leva a $\nabla_a R = 0$. Isto parece ser uma restrição à geometria forte demais, e realmente é. Em particular, há problemas para o limite Newtoniano (limite que estudaremos depois).

Exercício: Mostre que $\nabla^a R_{ab} = 0$ implica em $\nabla_a R = 0$.

Exercício: Não se trata de um argumento histórico, mas considere a métrica de FRW sem curvatura espacial. O que as condições $\nabla^a R_{ab} = 0$ e $\nabla_a R = 0$ implicam para o fator de escala?

Assim, Einstein buscou por um tensor geométrico, ainda de segunda ordem nas derivadas, que fosse sempre compatível com a conservação do tensor energia momento. Isto é, a conservação de T_{ab} não gera uma equação dinâmica independente.

Tensor de Weyl

Def.: Num espaço de dimensão $n > 2$, o tensor de Weyl é definido por

$$C_{abcd} \equiv R_{abcd} + \frac{2}{n-2}\left(g_{b[c}R_{d]a} - g_{a[c}R_{d]b}\right) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c}g_{d]b} \tag{17}$$

Propriedades do tensor de Weyl:

1. O tensor de Weyl satisfaz as 5 propriedades acima listadas do tensor de Riemann.
2. É um tensor sem nenhum traço, isto é, $C^a{}_{bac} = C^a{}_{abc} = C_{ab}{}^a{}_c = \ldots = 0$.
3. Perante transformações conformes (i.e., $g_{ab}(x) \to \Omega^2(x) g_{ab}(x)$), $C^a{}_{bcd}$ é invariante.
4. Se $C^a{}_{bcd} = 0$ então a métrica é dita ser conformemente plana, ou seja, ela pode ser escrita como uma métrica de Minkowski multiplicada por um fator conforme. Em particular, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker é conformemente plana.

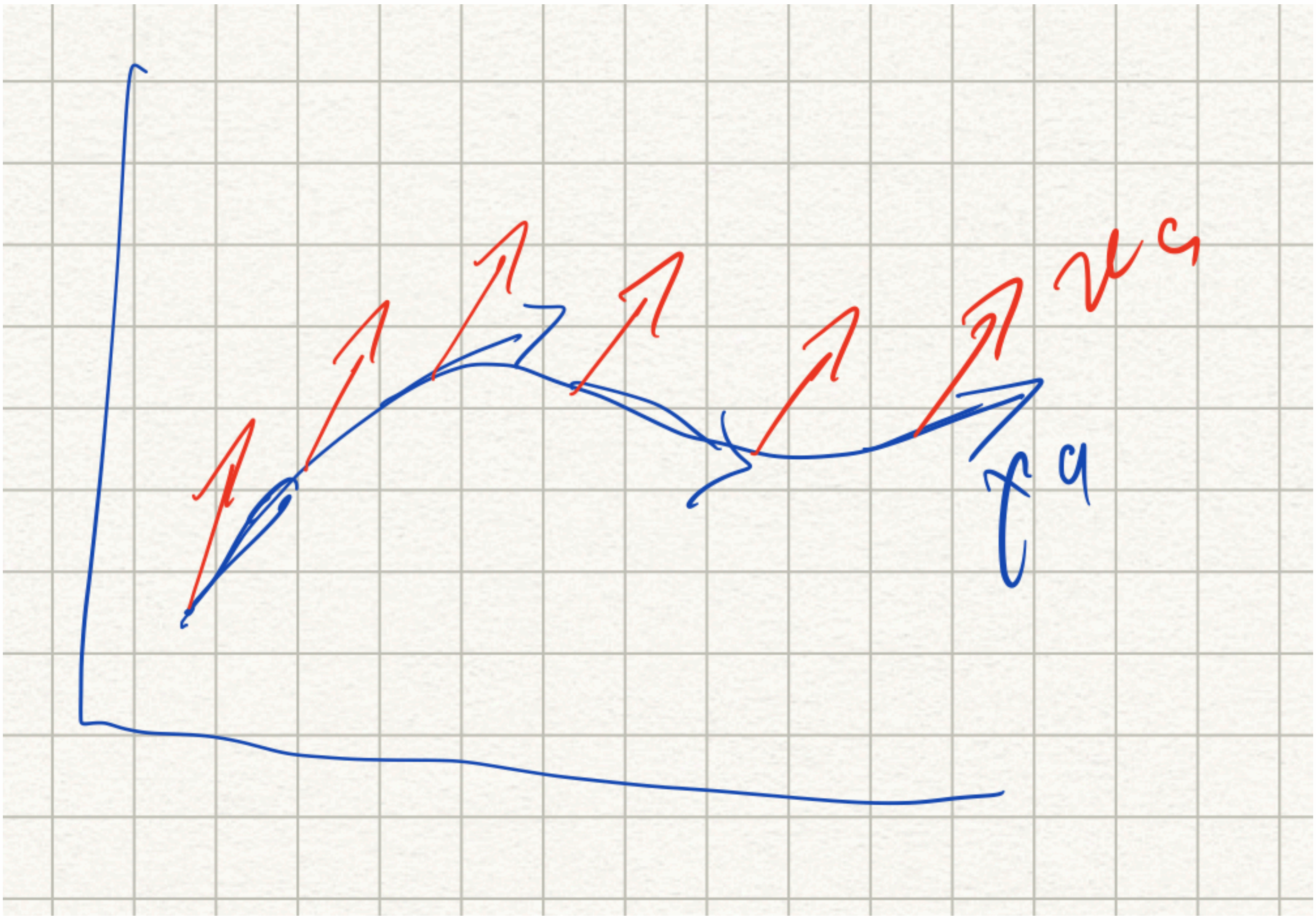
Estas propriedades em geral não são simples de demonstrar, mas não são centrais no nosso curso. Assim não indico as fazer como exercícios no momento.

Geodésicas

Lembremos que o transporte paralelo de um vetor v^a ao longo de uma curva C de vetor tangene t^a é dado por

$$t^a \nabla_a v^b = 0. \tag{18}$$

Vimos também que, sendo $x^a(\tau)$ a curva C, que é parametrizada por τ, então o vetor tangente à curva é dado por $t^a = dx^a/d\tau$.



Caso um vetor seja transportado paralelamente a si mesmo, temos o caso $t^a = v^a$, logo

$$v^a \nabla_a v^b = 0. \tag{19}$$

Ademais, como nesse caso v^a é também tangente à curva, $v^a = dx^a/d\tau$.

No espaço euclidiano,

$$0 = v^a \nabla_a v^b = \sum_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \partial_\mu \frac{dx^b}{d\tau} = \frac{d^2 x^b}{d\tau^2}. \tag{20}$$

A solução da equaçao acima é uma reta no espaço euclidiano:

$$x^a = x_0^a + v_0^a \tau \implies v^a = v_0^a\,. \tag{21}$$

Nota-se que a ``velocidade'' v^a é uma constante.

Em geral, a solução de $v^a \nabla_a v^b = 0$ não será uma reta no sentido euclidiano. A curva C que satifaz esta condição e o parâmetro τ que a parametriza são chamados respectivamente de **geodésica** e parâmetro afim. A geodésica é uma extensão natural do conceito de linha reta em espaços curvos.

Geodésicas não precisam necessariamente serem parametrizadas por um parâmetro afim. Por exemplo, uma curva cuja aceleração é proporcional à velocidade também irá descrever uma reta no espaço euclidiano. De forma mais geral, a equação da Geodésica pode ser expressa por

$$v^a \nabla_a v^b = \alpha v^b \,, \tag{22}$$

em que α é um parâmetro real arbitrário. No espaço euclidiano, podemos resolver esta equação explicitamente, encontrando,

$$v^a = e^{\alpha(\tau - \tau_0)} v_0^a \tag{23}$$

ou seja, a velocidade não é uma constante, mas a sua direção é.

O que importa é que a direção da velocidade não muda.

Ademais, é sempre possível reparametrizar essa curva geodésica proporcional à velocidade de forma a obter a versão com parâmetro afim. A saber, sendo T o parâmetro afim e τ um parâmetro genérico,

$$\frac{d^2 T}{d\tau^2} = \alpha \frac{dx^a}{d\tau} \,. \tag{24}$$

Exercício: Verifique a expressão acima.

Métodos para calcular a curvatura

Peço que leiam essa parte no Wald, tendo em vista os exercícios abaixo:

- **Exercício**: Demonstre a eq. (3.4.9)
- **Exercício**: Faça um resumo sobre as tetradas. Em particular, estaveleça um paralelo entre elas e as coordenadas polares no plano euclidiano.

Outros exercícios

- Sugestão de exercício (dificulade acima do padrão, mas é um bom exercício): fazer exercício 2 deste capítulo do Wald. Este exercício mostra que toda métrica em espaço bidimensional é conformemente plana. Este é um resultado bem importante e bem conhecido. Ele pode ser aplicado também para subvariedades bidimensional. Isto consiste uma forma de garantir, por exemplo, que a parte angular das coordenadas de Schwarschild pode ser sempre tomada tal qual a parte angular de coordenadas esféricas, sem perda de generalidade.
- **Exercício**: exercício 6 do Wald, sobre coordenadas esféricas.