Parte 3 - Equação de Einstein

Curso de Relatividade Geral I

Prof.: Davi C. Rodrigues

PPGCosmo, semestre 2022/2

Página da disciplina: https://www.davi.cosmo-ufes.org/rg2022-2.html

Parte 3 - Equação de Einstein
- Relatividade especial
  - Energia e momento
  - Tensor energia-momento
  - Tensor energia momento de Klein-Gordon
  - Eletromagnetismo
- Relatividade geral
  - Eletromagnetismo em espaços curvos
  - Equação de Einstein
  - Princípios de equivalência
  - Equações de Einstein linearizadas em torno de Minkowski
  - Derivada de Lie e vetores de Killing
    - Visão geral da derivada de Lie
    - Pullback & Pushforward
    - Difeomorfismos, pullbacks e pushforwards
    - Duas aplicações de difeomorfismo: transformações passivas e ativas
    - Definição de derivada de Lie
    - Aplicações
    - Isometrias e vetores de Killing
  - Calibres da gravitação linearizada
    - Comentário sobre spin e gravitação (Fierz-Pauli)
  - Limite Newtoniano
  - Ondas gravitacionais

Relatividade especial

Relatividae especial, como sabermos, é baseada no espaço de Minkowski mas não necessarimaente precisa ser expressa usando as coordenadas canônicas de Minkowski. Isto pode ser sucintamente expresso dizendo que a métrica do espaço-tempo em relatividade especial é dada por

$$\eta_{ab} = \eta_{\mu\nu} dx^\mu_a dx^\nu_b, \tag{1}$$

com $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$.

Ou seja η_{ab} é qualquer métrica que possa ser encontrada a partir de uma transformação de coordenadas de $\mathrm{diag}\,(-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$.

Em outras palavras, no contexto de relatividade especial, o espaço-tempo é uma variedade pseudo-euclidiana de dimensão 4.

Considere uma curva no espaço de Minkowski cujo vetor tangente seja denotado por T^a.

> Se, para todos os pontos da curva, $T^a T^b \eta_{ab} = 0$ então a curva é de **tipo luz**.
>
> Se $T^a T^b \eta_{ab} < 0$, a curva é do **tipo tempo**.
>
> E se $T^a T^b \eta_{ab} > 0$, temos uma curva **tipo espaço**.

O postulado da relatividade especial que diz que nenhuma partícula pode viajar mais rapidamente que a luz é equivalente a dizer que as trajetórias de partículas massivas são necessariamente do tipo tempo.

- *Questão*: Seria possível alterar a parametrização de uma curva de forma a transformar uma curva de um dos 3 tipos acima em um outro caso desses 3 tipos? Por quê?

O **tempo próprio** é o tempo medido entre dois eventos segundo um observador para o qual ambos eventos ocorrem na mesma posição. Assim, podemos dizer que

$$d\tau^2 = -ds^2. \tag{2}$$

Equivalentemente, o Wald usa a seguinte definição para o tempo próprio:

$$\tau = \int (-\eta_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt, \tag{3}$$

em que $T^a = dx^a/dt$.

- *Questão*: Verifique que as duas definições de tempo próprio são compatíveis.

Introduzimos T^a como um vetor tangente a uma curva qualquer $x^a(t)$, em que t é um parâmetro qualquer. O vetor tangente a uma curva parametrizada pelo tempo próprio recebe um nome especial, trata-se da quadrivelocidade, que é denotada por $u^a \equiv dx^a/d\tau$ e satisfaz:

$$u^a u_a = -1. \tag{4}$$

- *Questão*: Verifique o resultado acima.

Caso $x^a(\tau)$ descreva uma geodésica, então

$$\frac{D^2 x^a}{D\tau^2} \equiv u^b \nabla_b u^a = 0\,. \tag{5}$$

A eq. acima é uma imediata extensão do conceito de aceleração. Em relatividade especial, as trajetórias de partículas livres satisfaem equações da geodésica.

Energia e momento

Toda partícula possui uma propriedade chamada massa repouso (para algumas partículas essa massa pode ser nula) e denotada por m. O 4-momento em relatividade especial é definido por

$$p^a \equiv m u^a \,. \tag{6}$$

A energia de uma partícula medida por um observador de 4-velocidade v^a é definida por

$$E = -p^a v_a \,. \tag{7}$$

Deve-se notar que, $u^a u_a = -1$, mas $u^a v_a$ não precisa satisfazer essa relação.

Um observador pode descrevê-la usando o ``sistema de coordenadas inercial global'', no qual a métrica de Minkowski toma sua forma canônica. Estando a partícula em repouso com respeito ao observador, temos

$$v^a \overset{*}{=} v^\mu \partial^a_\mu = v^0 \partial^a_0 \,. \tag{8}$$

Como $v^a v_a = -1$, e usando a métrica de Minkowski na sua forma canônica, nota-se que $v^0 = 1$. Logo, nesse sistema de coordenadas, $E \overset{*}{=} p^0$. E podemos ainda concluir $E \overset{*}{=} m$, dado que $p^0 = mu^0 = mv^0$. Uma outra forma de identificar um observador em repouso com a partícula, independentemente do sistema de coordenadas, é notar que nesse caso $v^a = u^a$, e portanto $E = -p^a u_a = m$.

Tensor energia-momento

Ou tensor tensão-energia-momento, ou ainda tensor tensão-energia. O mais comum é Tensor energia-momento.

Distribuições contínuas de matéria são descritas pelo tensor simétrico T_{ab}, que fornece energia, momento e tensão do fluido.

- Para um observador de 4-velocidade v^a, a densidade de energia é $\rho = T_{ab} v^a v^b$.
- $p^b = -T_a^{\ b} v^a$ é o vetor densidade de momento. Sendo x^a um vetor espacial que satisfaz $x^a v_a = 0$, podemos também dizer que, na direção x^b, o momento é dado por $-T_{ab} v^a x^b$.
- $t^b_x = T_a^{\ b} x^a$ é a tensão num elemento do fluido na direção x^a. Logo, a componente na direção y^a referente à tensão na direção x^a é dada por $T_{ab} x^a y^b$.
- A pressão é um caso particular de tensão. Sejam x^a, y^a e z^a três vetores ortogonais entre si. Podemos definir "pressões'' em 3 direções", ou melhor, componentes principais da tensão dadas por: $P_x = T_{ab} x^a x^b$, $P_y = T_{ab} y^a y^b$, $P_z = T_{ab} z^a z^b$. Como comumente pressão é por definição uma grandeza isotrópica, a pressão em si pode ser definida como $P = \frac{1}{3}(P_x + P_y + P_z)$. Por outro lado, embora menos formalmente, há muitos textos que usam o tempo pressão anisotrópica.

Um fluido perfeito é *definido* pelo tensor

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(\eta_{ab} + u_a u_b) \,. \tag{9}$$

Tensor energia momento de Klein-Gordon

Ver desenvolvimentos no livro

Eletromagnetismo

Os vetores campo elétrico e campo magnético são expressos, de forma covariante, por meio de

$$E^a = F^a_b v^b \tag{10}$$

$$B^a = -\frac{1}{2}\epsilon^{abcd} v_b F_{cd} \tag{11}$$

E as equações de Maxwell são

$$\nabla^a F_{ab} = -4\pi j_b \tag{12}$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0\,. \tag{13}$$

A última equação é equivalente a

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a\,. \tag{14}$$

Usando o calibre $\nabla_a A^a = 0$,

$$\Box A_b = \nabla^a \nabla_a A_b = -4\pi j_b\,. \tag{15}$$

Consideremos o seguinte caso particular para A_a, seja

$$A_a = C_a \exp(iS)\,, \tag{16}$$

em que C_a é consante e S é um campo. Está implícito acima que só a parte real é fisicamente relevante (notação complexa de solução de ondas no eletromagnetismo). Nota-se que ondas planas são um caso particular da expressão acima.

$$\partial_a \partial^a A_b = 0$$

$$\partial_a \partial^a (C_b e^{iS}) = 0$$

$$\partial_a (C_b e^{iS} \partial^a S) = 0$$

$$\therefore\ i e^{iS} \partial_a S \partial^a S + e^{iS} \partial_a \partial^a S = 0$$

$$\therefore \begin{cases} \partial_a S \partial^a S = 0 \\ \partial_a \partial^a S = 0 \end{cases}$$

$$\partial_a A^a = 0 \Rightarrow \boxed{C^a \partial_a S = 0}$$

Hipersuperfície nula: superfície cujos vetores normais são do tipo luz. Lembrar que vetores tipo luz às vezes são chamados de vetores nulos, pois satisfazem $k^a k_a = 0$, embora $k_a \neq 0$.

Seja $k_a = \partial_a S$, logo k_a é vetor nulo e é normal às curvas de S constante. Ou seja, as curvas de S constante são hipersuperfícies nulas.

Nota-se também que

$$k^a \nabla_a k_b = 0 \tag{17}$$

(basta derivar $\partial_a S \partial^a S = 0$). Da equação acima, vê-se que as curvas cujas tangentes são dadas por k_a são curvas geodésicas nulas.

Num dado sistema de coordenadas, a frequência de uma onda é porporcional a $\partial_0 S = k_0$. Um observador com velocidade v^a, percebe uma frequência dada por

$$\omega = -v^a k_a. \tag{18}$$

A força de Lorentz pode ser expressa por

$$\frac{D^2x^b}{D\tau^2} = u^a\nabla_a u^b = \frac{q}{m}F^b{}_c u^c\,. \tag{19}$$

Relatividade geral

O eletromagnetismo pode ser naturalmente entendido no contexto de relatividade especial: pode-se usar um sistema de observadores inerciais que não estão sujeitos a dado campo eletromagnético e considerar cargas testes. Acelerações observadas nas cargas testes, com respeito ao movimento dos observadores inerciais, são atribuídas a efeitos da força de Lorentz.

Poderíamos usar a mesma estrutura para tratar da força gravitacional? A situação é um tanto mais complexa. Podemos considerar observadores que não sentem forças eletromagnéticas de forma a poderem perceber uma aceleração relativa das partículas testes. Por outro lado, num campo gravitacional uniforme é impossível perceber acelações relativas (princípio de equivalência), isso independenmente das massas dos observadores inerciais e da massa da partícula teste.

Tal como comentado pelo Wald, curiosamente a relatividade geral não se desenvolvou buscando tratar diretamente da dificuldade acima, começa a partir de outras questões. Em especial, o princípio de equivalência é tratado como questão central, não uma coincidência.

Em relatividae especial, corpos livres de forças seguem "linhas retas", ou seja, as geodésicas do espaço de Minkowski. A presença de efeitos gravitacionais corresponderia a uma diferente geometria do espaço tempo. Partículas livres (contudo sob ação gravitacional) continuariam seguindo geodésicas, mas seriam geodésicas de uma geometria riemanniana mais geral. E o que isso tem a ver com o princípio de equivalência?

Dois pontos de destaque:

1. Qualquer métrica (pseudo-)riemanniana é localmente bem aproximada por Minkowski;
2. Localmente, é sempre possível escolher um sistema de coordenadas em que as geodésicas sejam aproximadamente linhas retas no contexto de Minkowski.

IMPORTANTE: E isso já levou a muita confusão...

- Localmente a variedade não se torna igual a uma variedade de Minkowski.
- Diferentes variedades riemannianas não precisam ser idênticas localmente.
- O fato da métrica poder ser aproximada por Minkowski não implica que as derivadas da métrica podem ser sempre tomadas como nulas.
- Em particular, escolher coordendas tal que a métrica seja aproximadamente Minkowski em nada altera o escalar de Ricci (ou qualquer outro escalar geométrico).

A realização dos dois pontos acima se deve às **coordenadas normais de Riemann**. Mais precisamente, num dado ponto p, sempre é possível expressar $g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}$ e $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(p) = 0$. Para mais detalhes, ver em especial o livro de Poisson & Will (capítulo 5).

É na verdade possível ir além, e ainda em maior contato com o princípio de equivalência. Seja γ uma geodésica tipo tempo. É possível encontrar um sistema de coordenadas tal que, $\forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\gamma}$,

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} \text{ e } \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(p) = 0\,. \tag{20}$$

As coordenadas acima são chamadas de **coordenadas normais de Fermi**. Para detalhes de demontração e apresentação da forma explícita em torno de γ, ver capítulo 5 do livro de Poisson & Will. Outros livros com essa demonstração: Plebanski & Krasinski (cap. 12) e Zee (Cap. IX, apêndice 4).

Importante: só é possível obtermos que Γ se anula em dado ponto, por meio de transformações de coordenadas, pois Γ não se transforma tal como um tensor. -- Lembrar que há uma sutileza na forma com que o Wald trata o Γ. A explicação mais usual é simplesmente dizer que Γ não é tensor. Na definição do Wald Γ é sim um tensor, contudo mudanças de coordenadas levam a mudar o Γ em si, na abordagem do Wald.

Eletromagnetismo em espaços curvos

Existem certos princípios mínimos para transformar uma teoria bem entendida em relatividade especial em uma relativistica no sentido da relatividade geral. Como o nome indica, são princípios, não regras fundamentais. Uma vez estabelecida a teoria no contexto de relatividade geral, analisá-la no caso particular de relatividade especial é procedimento bem determinado e sem ambiguidades, mas o caminho inverso não é único.

A diferença crucial com respeito à relatividade especial é que estamos agora livres para tratar de métricas de qualquer geometria (pseudo-)riemanniana. Localmente, devemos conseguir recobrar os resultados de relatividade especial.

A ambiguidade na passagem $\eta_{ab} \to g_{ab}$ pode se apresentar de diferentes formas:

i) adição de termos proporcionais a R ou uso de outras estruturas geométricas que são nulas em Minkowski,

ii) ordenamento de derivadas, por exemplo em termos como $\nabla_a \nabla_b A^a \neq \nabla_b \nabla_a A^a$. Essa diferença não aparece em Minkowski, independentemente das coordenadas utilizadas.

As equações de Maxwell e a força de Lorentz, no contexto de relatividade especial são, tal como vimos,

$$\nabla^a F_{ab} = -4\pi j_b \,, \tag{21}$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \,. \tag{22}$$

$$\frac{D^2 x^b}{D\tau^2} = u^a \nabla_a u^b = \frac{q}{m} F^b{}_c u^c \,. \tag{23}$$

Segundo o princípio mais simples possível de substituição $\eta_{ab} \to g_{ab}$, no contexto de relatividade geral mantemos exatamente a mesma forma das equações acima, e apenas considerandos que a métrica pode ser de qualquer geometira riemanniana. A equação homogênea acima segue tendo como consequência que F_{ab} pode ser expresso em função de um potencial A_a. Trata-se de uma consequência do **Lema de Poincaré**. Na linguagem de formas diferenciais: $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$ diz que F_{ab} é 2-forma fechada (i.e., $dF = 0$), logo existe uma 1-forma A_a tal que $F_{ab} = \nabla_{[a} A_{b]}$ (i.e., $F = dA$). A excessão para essa regra ocorre somente em espaços de topologia não trivial (ver por exemplo Nakahara). Nota: isto é uma generalização da regra $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0} \implies \exists \phi \mid \vec{A} = \vec{\nabla}\phi$.

Exercício: Verifique, no contexto de relatividade geral, que as equações de Maxwell impõe $\nabla^b j_b = 0$.

É interessante nos perguntarmos o que ocorreria se considerássemos algo menos imediato, como abaixo:

$$\nabla^a (F_{ab} + k R_{ab}) = -4\pi j_b \,, \tag{24}$$

em que k é uma constante.

É evidente que, se a métrica fosse exatamente η_{ab}, o novo termo simplesmente desapareceria e recobraríamos o eletromagnetismo usual. No contexto de relatividade geral, não podemos garantir que exista um sistema de coordenadas tal que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ numa vizinhança de um ponto, mas apenas que $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ numa vizinhança. Mesmo sendo válida a aproximação anterior em dada vizinhança, é em geral falso que $R_{\mu\nu} \approx 0$. Logo a correção acima para o eletromagnetismo poderia ser testada localmente (em queda livre), independente de qualquer teste associado à gravitação. Desde que k seja suficientemente pequeno e considerando um contexto clássico, em princípio isso é possível; mas é importante estar ciente de que a correção acima é mais do que uma correção devido à gravitação, ela altera a dinâmica mesmo no contexto de relatividade especial. É bom lembrar também que é difícil corrigir o eletromagnetismo de forma consiste com observações, dado que ele é bem entendido e testado tanto classica quanto quanticamente.

Vejamos agora como ficam as equações de Maxwell no calibre de Lorenz $\nabla_a A^a = 0$,

$$\Box A_b + R_{cb} A^c = -4\pi j_b. \tag{25}$$

Para encontrar o tensor de Ricci acima, note que

$$\nabla^a(\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) = \Box A_b - \nabla^a \nabla_b A_a$$

$$\nabla^a \nabla_b A_a = \overbrace{\nabla_b \nabla^a A_a}^{0} + [\nabla^a, \nabla_b] A_a$$

$$= R^a{}_{cab} A^c$$

$$= R_{cb} A^c$$

Assim, nota-se que no calibre de Lorentz há correções que, em geral, podem ser medidas localmente.

Exercício: Mostre que a equação de Maxwell modificada tal que, no calibre de Lorenz, o termo $R_{ab}A^b$ não aparece é incompatível com $\nabla_a j^a = 0$.

O novo termo, proporcional ao escalar de Ricci, torna o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em relatividade geral mais complicada.

O conjunto de quações de relatividade geral com eletromagnetismo é chamado de equações de Einstein-Maxwell há vários artigos e sutilezas a seu respeito. Dentre vários outros, veja por exemplo https://arxiv.org/pdf/1602.01492.pdf , este artigo sobre radiação de cargas aceleradas https://arxiv.org/pdf/physics/0506049.pdf .

Equação de Einstein

Partindo de princípios de simplicidade e um pouco de limite Newtoniano, inicialmente Einstein considerou a seguintes equação

$$R_{ab} = k\,T_{ab}\,, \tag{26}$$

em que κ é uma constante. Esta foi rejeitada devido a implicar $\nabla_a R = 0$ para qualquer tensor energia momento que se conserve. Isto leva a uma restrição muito drástica para a geometria. Ademais, uma vez notada essa deficiência (e entendendo das identidades de Bianchi), não é dificil imaginar uma realização em que o tensor energia momento é naturalmente conservado,

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \kappa T_{ab}\,. \tag{27}$$

Uma vez entendido que o lado esquerdo deve ser uma função exclusivamente da métrica e de suas derivadas, que seja "simples" e o divergente seja nulo, há ainda uma natural extensão na expressão acima:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab}\,, \tag{28}$$

com Λ constante (constante cosmológica). Esta é a relatividade geral completa.

Pedagogicamente, muitas vezes é melhor primeiro omitir Λ, para depois avaliar as consequências de sua inserção.

Dependendo do contexto, a eq. acima pode ser chamada de eq. de Einstein com constante cosmológica, reservando o termo "Equação de Einstein" somente para o caso sem constante cosmológica. Embora muitas vezes essa distinção seja prática, especialmente num contexto pedagógico, sob o ponto de vista de princípios de dinâmica e geometria, não há nenhum motivo para excluir a constante cosmológica, tratando-a como externa à relatividade geral.

Um possível motivo, às vezes levantado, é que Λ pode gerar uma força efetiva repulsiva, enquanto a gravidade seria necessariamente atrativa. Isto entendo como um preconceito. Por mim, gravidade é aquilo que vem de uma teoria da gravitação bem estabelecida, quer tenha tempo absoluto, quer seja só atrativa, ou o que for.

Um outro argumento comum contrário à introdução de Λ como parte da relatividade geral se deve à famosa afirmativa de Einstein "my biggest blunder". Porque isso é irrelavante:

> i) Isso não foi algo que Einstein escreveu, só há uma testemunha que afirma que Einstein disse isso (George Gamov), que pode ter interpretado a situação de forma diferente da pretendida por Einstein, ou pode ter recordado mal as palavras.

> ii) É possível que ele se estivesse referindo não à introdução da constante cosmológica em si, mas ao primeiro uso que fez dela: tentando criar um universo estático, o que fez com que a detecção da expansão do universo não fosse considerada como uma predição da relatividade geral (é uma consequência dela, mas isso só ficou claro depois da descoberta da expansão). Caso ele tenha dito aquilo, acho esta uma hipótese bem razoável.

> iii) Ainda que Einstein tivesse dito que a constante cosmológica foi um erro e não deveria ser introduzida jamais, isso seria uma interessante curiosidade histórica, mas em nada alteraria a situação da relatividade geral. O que um cientista diz sobre uma teoria científica, mesmo tendo sido ele o principal responsável, por fim não passa de mais uma opinião; em nada altera a essência da teoria. O entendimento atual de relatividade geral é bem além daquele de Einstein. Diga-se de passagem, há uma lenda de que Darwin teria, em seu leito de morte, negado toda a sua teoria da evolução. Não acho que seja verdade, mas, ainda que seja, isso muda algo para a teoria da evolução?

Alguém poderia pensar então além: não haveria outras generalizações da equações de Einstein? Sim, sabemos que há generalizações, as três generalizações mais simples (sob o ponto de vista de princípios geométricos) acho que são: $f(R)$, a abordagem métrica-afim e a inclusão de torção. Esses casos não requerem a introdução de novos campos independentes da métrica ou da conexão. $f(R)$-Palatini é em essência uma mistura de $f(R)$ com métrica afim, mas com consequências inesperadas, em alguns casos sendo idêntica à relatividade geral. Destes 3, o único em que a conexão é necessariamente consequência da métrica é $f(R)$. Contudo, $f(R)$ tem uma inconveniência clara que a afasta das hipóteses mais simples consideradas por Einstein: as equações de campo dependem de derivadas de até quarta ordem da métrica. Einstein explicitamente buscou por equações que fossem até segunda ordem para a métrica. Não há nenhum teorema que impeça alguém de considerar ordens superiores, mas, por simplicidade, Einstein buscou por equações de até segunda ordem. A adição da constante cosmológica está também de acordo com esse princípio de não introduzir termos de altas derivadas.

Exercício: Mostre que a eq. de Einstein pode ser escrita na forma $R_{ab} = \kappa(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T)$.

Outros comentários:

> i) não-linearidade das equações de Einstein.

> ii) Uma diferença com respeito à eq. de Maxwell: j_a não depende de F_{ab} ou de A_a, mas T_{ab} comumente depende de g_{ab}
>
> iii) Geodésicas e $\nabla_a T^{ab} = 0$: em geral a eq. da geodésica é uma equação independente da eq. de Einstein; mas em várias situações, $\nabla_a T^{ab} = 0$ é suficiente para encontrar a eq. da geodésica. (Geroch and Jang 1975)

Princípios de equivalência

Equações de Einstein linearizadas em torno de Minkowski

A ideia central soa bem simples. Vamos considerar uma geometria próxima de Minkowski, logo deve fazer sentido escrever

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab} \,, \tag{29}$$

em que γ_{ab} é em certo sentido uma pequena correção a η_{ab}, sento tal que, nas equações de Einstein, desprezaremos termos de ordem 2, ou superior, de γ_{ab}. Especificar de forma precisa o que esse "pequeno" quer dizer de forma independente de coordenadas não é simples. Contudo, para dado sistema de coordenadas podemos tratar $\gamma_{\mu\nu}$ como uma matriz cujas componentes são suficientemete pequenas em certo sistema de coordenadas em que η_{ab} possa ser expresso em sua forma canônica.

Importante: A relação $|\gamma_{\mu\nu}| \ll |\eta_{\mu\nu}|$ não precisa satisfeita para todas as componentes. Contudo, $|\gamma_{\mu\nu} A^\mu B^\nu| \ll |\eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu|$.

Seguiremos denotando a inversa da métrica por g^{ab}, mas é conveniente e padrão, num esquema perturbativo, tratar que os índices são levantados e abaixados usando a métrica de fundo, ou seja, η_{ab}.

Até a primeira ordem em γ_{ab}, a métrica inversa pode ser expressa por

$$g^{ab} \approx \eta^{ab} - \eta^{ac}\eta^{bd}\gamma_{cd} \equiv \eta^{ab} - \gamma^{ab}\,. \tag{30}$$

Isto é fácil de verificar, pois

$$g^{ab}g_{bc} \approx (\eta^{ab} - \gamma^{ab})(\eta_{bc} + \gamma_{bc}) = \delta^a_c - \gamma^{ab}\eta_{bc} + \eta^{ab}\gamma_{bc} = \delta^a_c - \gamma^a_c + \gamma^a_c = \delta^a_c\,. \tag{31}$$

Vamos denotar tensores expressos até a primeira ordem em γ_{ab} por meio de $^{(1)}$. Assim, o tensor de Einstein até primeira ordem pode ser expresso por

$$G^{(1)}_{ab} = \partial^c\partial_{(b}\gamma_{a)c} - \frac{1}{2}\Box\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma - \frac{1}{2}\eta_{ab}[(\partial^c\partial^d)\gamma_{cd} - \Box\gamma] \tag{32}$$

Exercício: Encontre a expressão acima.

Acima, estamos usando a notação do Wald para as derivadas, isto é, ∂_a é a derivada covariante associada à métrica η_{ab} (não e necessariamente a derivada parcial usual).

Também estamos usando que

$$\eta^{ab}\gamma_{ab} = \gamma^a_a \equiv \gamma\,. \tag{33}$$

Uma forma uma pouco mais sucinta pode ser obtida introduzindo

$$\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma\,, \tag{34}$$

pois assim temos

$$G^{(1)}_{ab} = -\frac{1}{2}\Box\bar{\gamma}_{ab} + \partial^c\partial_{(b}\bar{\gamma}_{a)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\bar{\gamma}_{cd} = 8\pi T^{(1)}_{ab}\,. \tag{35}$$

Com isto concluímos o objetivo central desta seção (equações de Einstein linearizadas), e já introduzimos a notação de $\bar{\gamma}_{ab}$. Para avançarmos, precisaremos tratar de "simetrias de calibre", mas para isso será útil antes vermos o que é a derivada de Lie e os vetores de Killing.

Derivada de Lie e vetores de Killing

Visão geral da derivada de Lie

A atuação da derivada de Lie sobre um tensor produz um novo tensor que tem o mesmo posto do original.

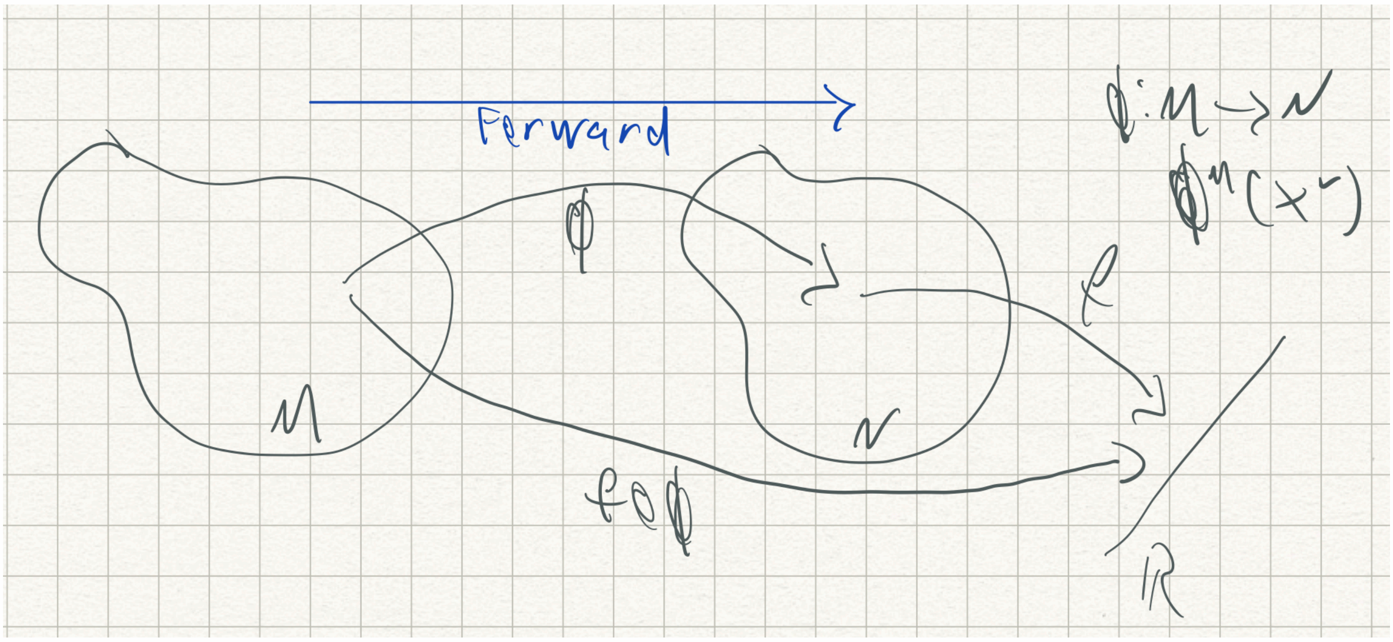
A derivada de Lie é uma generalização da noção de derivada direcional com a propriedade de ser independente da conexão. Isto é, pode ser definida independentemente da noção de derivada covariante. Nem toda derivação "em dada direção" é uma derivada de Lie, há diferentes formas de definir derivada direcional para campos tensoriais, há somente uma que é independente da noção de conexão.

Por exemplo, $v^a\nabla_a\phi$ e $v^a\nabla_a A^b$ podem ser ambos serem chamados de derivadas na direção v^b, contudo só o primeiro é uma derivada de Lie. O segundo depende da conexão.

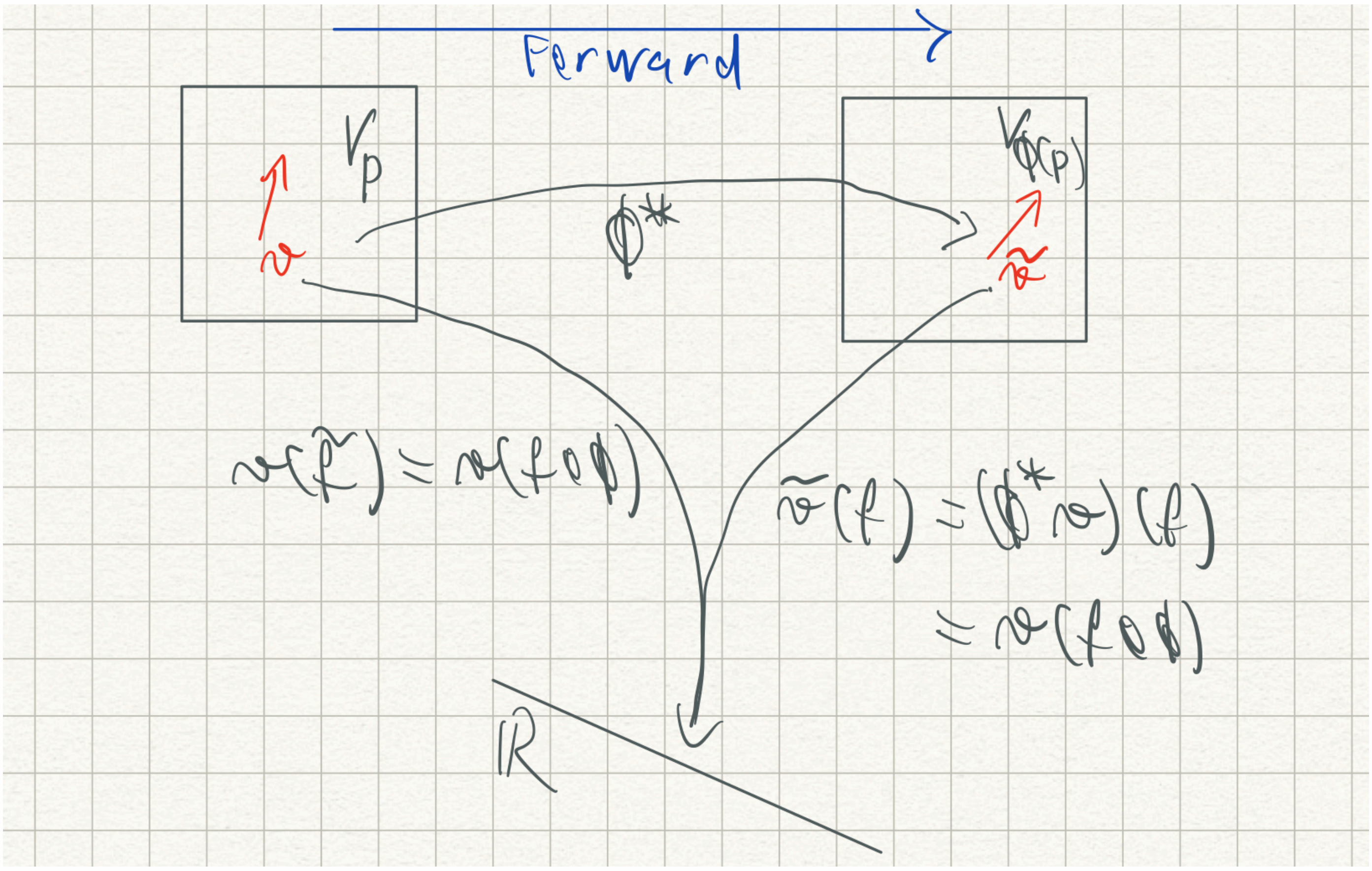
Para enteder como é possível definir um novo operador diferencial sem usar a conexão, previsaremos falar um pouco de pullbacks e pushforwards.

Pullback & Pushforward

Sejam M e N duas variedades, $\phi : M \to N$ mapa C^∞ e $f : N \to \mathbb{R}$.



Dizemos que ϕ "puxa" a função f, pois a partir de ϕ podemos transformar $f : N \to \mathbb{R}$ em $f \circ \phi : M \to \mathbb{R}$. Em outras palavras, ϕ define um "pullback" de f.



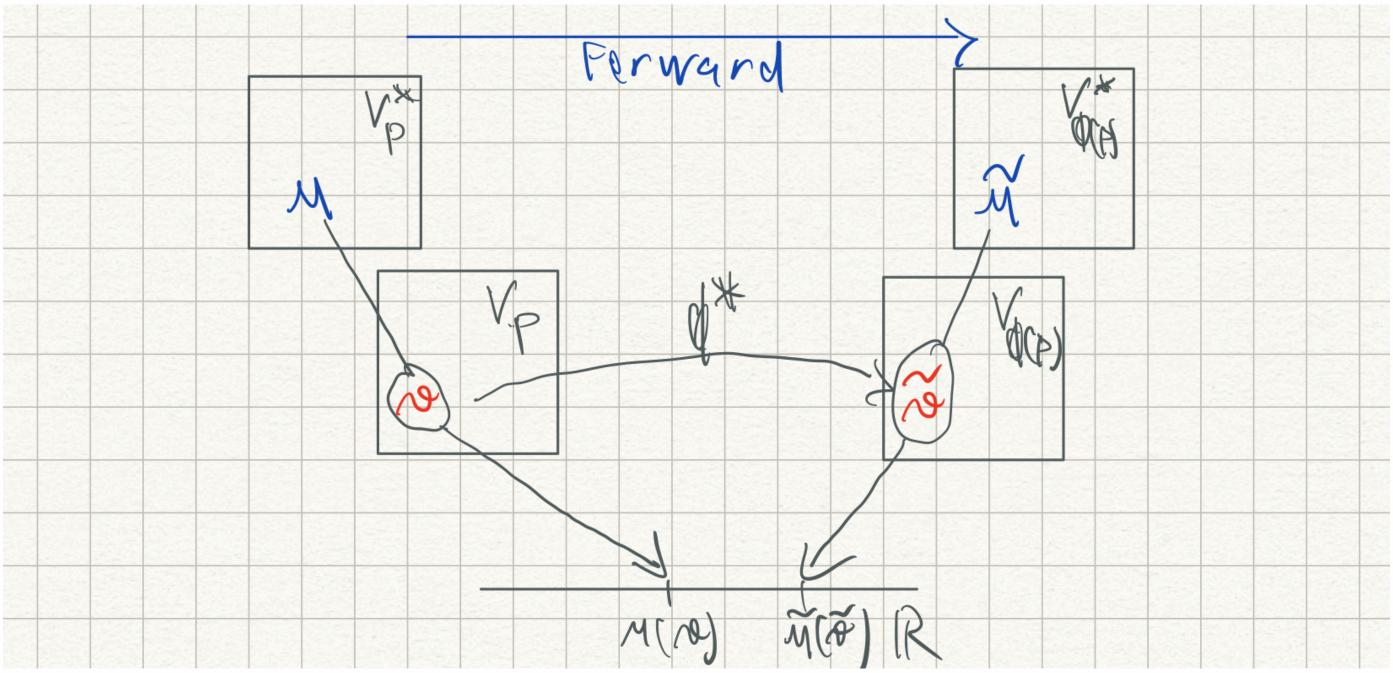
ϕ também induz outra transformação: "empurra" a definição de $v \in V_p = T_pM$ em $\tilde{v} \in V_{\phi(p)} = T_{\phi(p)}N$. Ou seja, define um "pushforward".

De forma explícita, podemos construir o mapa $\phi^* : V_p \to V_{\phi(p)}$, sendo ϕ^* dado por

$$\tilde{v}(f) = (\phi^* v)(f) = v(f \circ \phi)\,. \tag{36}$$

Não é difícil de perceber que ϕ também induz um mapa entre os espaços cotangentes. Contudo, o sentido do mapa para os espaços cotangentes é inverso ao do mapa entre os espaços tangentes, ou seja, é um "pullback".

Partindo de $\mu \in V_p^*$ e $\tilde{\mu} \in V_{\phi(p)}^*$, podemos considerar a atuação desses covetores sobre os vetores v e $\tilde{v}$, tal como segue na ilustração abaixo.



Como $\tilde{v} = \phi^* v$, podemos escrever

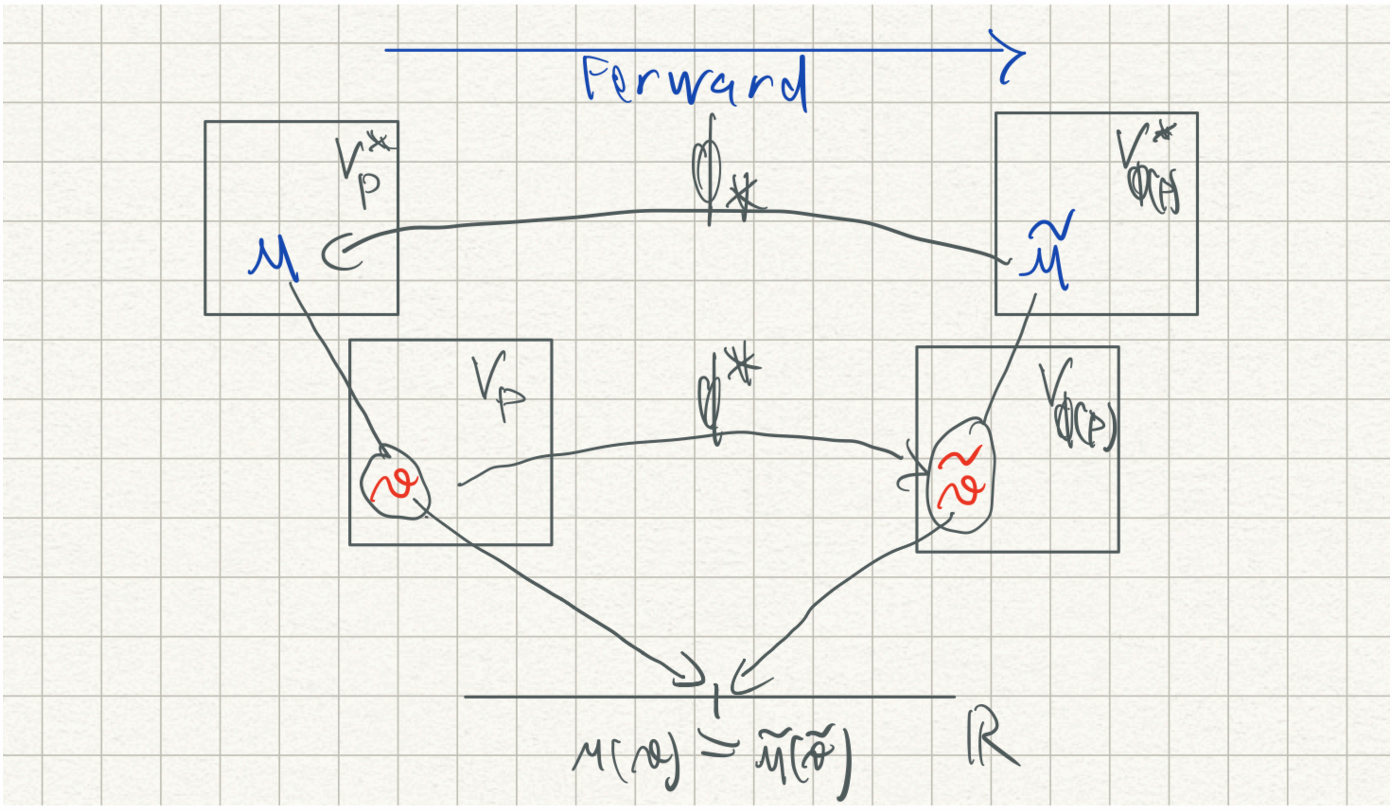
$$\tilde{\mu}(\tilde{v}) = \tilde{\mu}(\phi^* v)\,, \tag{37}$$

assim, identificando $\mu = \phi_* \tilde{\mu}$, definimos o pullback

$$\mu(v) = (\phi_* \tilde{\mu})(v) = \tilde{\mu}(\phi^* v) = \tilde{\mu}(\tilde{v})\,. \tag{38}$$

Ou seja,

$$\phi_* : V_{\phi(p)}^* \to V_p^*\,. \tag{39}$$



É fácil estender esses "puxões" e "empurrões" indiretamente gerados por ϕ para tensores do tipo $(0, k)$ ou $(k, 0)$. Como

$$(\phi_*\tilde{\mu})(v) = (\phi_*\tilde{\mu})_a v^a = \tilde{\mu}_c(\phi^* v)^c = \tilde{\mu}(\phi^* v)\,, \tag{40}$$

a estensão para tensores fica então

$$(\phi_*\tilde{T})_{a_1\ldots a_n} v^{a_1}\ldots v^{a_n} = \tilde{T}_{c_1\ldots c_n}(\phi^* v)^{c_1}\ldots(\phi^* v)^{c_n}\,, \tag{41}$$

$$(\phi^* T)^{c_1\ldots c_n}\tilde{\mu}_{c_1}\ldots\tilde{\mu}_{c_n} = T_{a_1\ldots a_n}(\phi_*\tilde{\mu})^{a_1}\ldots(\phi_*\tilde{\mu})^{a_n}\,. \tag{42}$$

Note que não é possível aplicar a mesma regra para tensores mistos. Não teria como fazer um pullback ou pushforward de tensor misto.

Difeomorfismos, pullbacks e pushforwards

Vamos agora considerar um importante caso particular, que é o caso em que ϕ é um difeomorfismo.

Neste caso, existe necessariamente a inversa ϕ^{-1}. Consequentemente, podemos agora falar de um pullback para vetores e de pushforward para covetores. Esses dois últimos são feitos com ϕ^{-1}, ou invés de ϕ.

Ademais, faz agora sentido definir pullback e pushforward de tensores mistos arbitrários. Por exemplo, agora é possível definir $\phi^* T$ por meio de

$$(\phi^* T)^a_b \mu_b v^a = T^b_a(\phi_*\mu)_b(\phi_* v)^a\,. \tag{43}$$

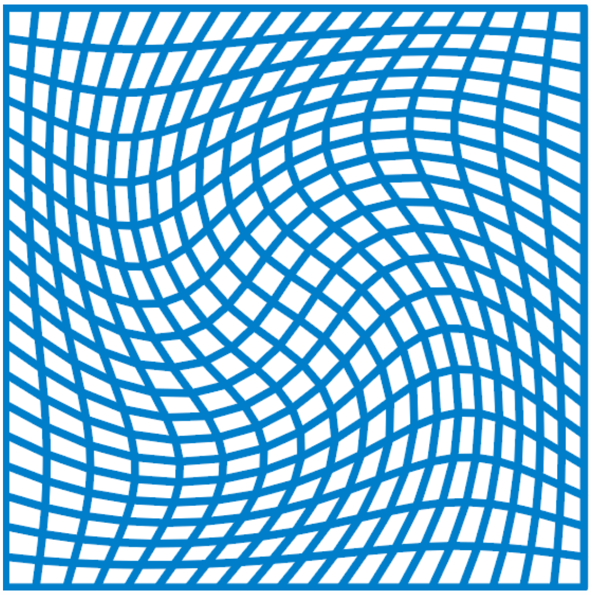
Acima, encontra-se implícito que o pullback $\phi_* v$ é feito com ϕ^{-1}.

Duas aplicações de difeomorfismo: transformações passivas e ativas

Qual a relevância de difeomorfismos neste contexto? Podemos distinguir duas classes, ambas de interesse:

- Transformações ativas.
- Transformações passivas.

Para as **transformações ativas**, $\phi : M \to M'$, em que M' é diferente de M (mas tem a mesma dimensão). Um exemplo trivial (transformação global) é considerar que M' seja uma rotação de M. Um exemplo simples para transformação local: considere a seguinte deformação de uma variedade plana (exemplo da wikipedia)



Neste caso acima, estamos interpretando o difeomorfismo como uma deformação da variedade.

No caso de **transformação passiva**, temos $\phi : M \to M$, isto é, a variedade de destino é a mesma que a de origem. A variedade em si não muda, o que muda é a descrição dessa variedade, isto é, o sistem de coordenadas que a descreve.

Todo difeormofismo pode ser interpretado como uma transformação de coordenadas (e.g., ao invés da rotação da variedade, pode-se igualmente considerar a rotação do sistema de coordenadas). Isso é garantido pois todo difeomorfismo, por definição, sempre possui inversa. Transformações de coordenadas, contudo, são conceitos mais abrangentes, pois em geral só dependem da existência da inversa localmente (mas na prática, alguns requisitos de diferenciabilidade são também impostos).

Definição de derivada de Lie

Seja $\phi_t : M \to M'$ um grupo de difeomorfismos de um parâmetro, com ϕ_0 correspondendo à identidade.

Como ϕ_t é difeomorfismo, podemos tratar de $\phi_t^* T$, em que T representa tensor de posto arbitrário (os índices estão omitidos).

Tal como vimos na Parte 1, $\phi_t(p) : \mathbb{R} \to M$ determina curvas integrais em M. Ademais, estas curvas determinam (e podem ser determinadas por) um campo vetorial v^a.

Definimos a derivada de Lie com respeito à direção v^a por

$$\mathcal{L}_v T = \lim_{t \to 0} \frac{\phi_{-t}^* T - T}{t} \tag{44}$$

Aplicações

Sendo T uma função escalar $f : M \to \mathbb{R}$, então $(\phi^*_{-t} f) : M' \to \mathbb{R}$, explicitamente: $\phi^*_{-t} f = f \circ \phi^{-1}_{-t} = f \circ \phi_t$. A última passagem se deve a $\phi_t \circ \phi_{t'} = \phi_{t+t'}$ e a $\phi^{-1}_t \circ \phi_t = \phi_0 \implies \phi^{-1}_t = \phi_{-t}$. Consequentemente, $(\phi^*_{-t} f)(p) = f(\phi_t(p))$. Para t suficientemente próximo de zero, podemos escrever $(\phi^*_{-t} f)(p) = f(\phi_0(p) + t\phi'_0(p)) = f(\phi_0(p) + tv_p)$, em que v_p se refere ao campo vetorial v^a no ponto p. Observão: Explicitando os índices, $f(\phi_0(p) + tv_p) = f(\phi^a_0(p) + tv^a_p)$. Assim, pela definição,

$$\mathcal{L}_v f = v^a \partial_a f = vf\,. \tag{45}$$

Ou seja, para uma função escalar, a derivada de Lie é dada pela forma usual da derivada direcional de um escalar. Nota-se que podemos usar a derivada covariante no lugar da derivada parcial, sem alterar o resultado. Lembramos que, embora estejamos vendo a derivada de Lie depois da derivada covariante, uma não depende da outra, poderíamos apresentar a derivada de Lie antes da derivada covariante.

Num sistema adaptado a v^a, ou seja, num sistema em que $v^a \overset{*}{=} v^\mu = (1, 0, 0, \ldots)$, nota-se que

$$\mathcal{L}_v f \overset{*}{=} \frac{\partial f}{\partial x^1}\,. \tag{46}$$

E como seria a derivada de Lie de um campo vetorial w^a?

Num sistema adaptado a v, $\phi^*_{-t} w^a(x^1, x^2, \ldots) = w^a(x^1 + t, x^2, \ldots)$, logo

$$\mathcal{L}_v w^a \overset{*}{=} \frac{\partial w^a}{\partial x^1}\,. \tag{47}$$

Seguindo a abordagem do Wald, como

$$[v, w]^\mu \equiv [v^a \partial_a, w^b \partial_b]^\mu = v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}\,, \tag{48}$$

nota-se que, no sistema adaptado,

$$[v, w]^\mu = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^1}\,. \tag{49}$$

Consequentemente, independentemente do sistema de coordenadas,

$$\mathcal{L}_v w^a = [v, w]^a\,. \tag{50}$$

É importante ressaltar que $[v, w]^a$ é necessariamente um tensor, mesmo sendo definido a partir de derivadas parciais.

Exercício: Verifique diretamente que a substituição de ∂ por ∇ não altera a expressão de $[v, w]^a$, isto é, os Γ's se cancelam.

A partir do conhecimento da derivada de Lie de um escalar e de um vetor, é imediato encontrar a derivada de Lie de um covetor, a saber,

$$\mathcal{L}_v w_a = v^b \partial_b w_a + w_b \partial_a v^b = v^b \nabla_b w_a + w_b \nabla_a v^b \tag{51}$$

Exercício: Encontre as igualdades acima.

Usando as expressões anteriores, para um tensor arbitrário covariante de posto 2 encontra-se

$$\mathcal{L}_v w_{ab} = v^c \partial_c w_{ab} + w_{cb} \partial_a v^c + w_{ac} \partial_b v^c\,. \tag{52}$$

Exercício: Encontre a expressão da atuação da derivada de Lie sobre um tensor arbitrário de qualquer posto.

Será de especial interesse para este curso a atuação da derivada de Lie sobre a métrica. Neste caso, temos

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a \,. \tag{53}$$

Dica: Para não esquecer do sinal, ambos os lados são simétricos nos índices.

Alguns textos partem da definição da derivada de Lie de um campo vetorial diretamente de $\mathcal{L}_v w^a = [v, w]^a$. Nota-se que essa expressão é explicitamente independente do sistema de coordenadas, satisfaz propriedades usuais de operadores diferenciais (linearidade e regra de Leibniz) e pode ser usada sem nenhuma menção à derivada covariante.

Isometrias e vetores de Killing

Caso g_{ab} seja invariante perante a transformação dada por $\mathcal{L}_v$, então diz-se que essa transformação é uma **isometria** de g_{ab}.

Exemplo simples: Seja g_{ab} a métrica de FRW e seja v^a um campo vetorial tipo espaço. Logo v^a determina uma isometria de g_{ab} (corresponde a uma translação espacial).

Diz-se que v^a gera uma isometria se, e somente se,

$$0 = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a \,. \tag{54}$$

Vetores que satisfazem a eq. acima são chamados de **vetores de Killing**. Em outras palavras, difeomorfismos ao longo de vetores de Killing não alteram a métrica.

Exercício: Seja ξ^a vetor de Killing. Seja u^a vetor tangente à geodésica γ. Mostre que o escalar $\xi^a u_a$ é preservado ao longo da geodésica. Nota-se que cada vetor de Killing independente (logo cada isometria independente) leva um escalar que é conservado (ao longo de geodésicas).

Calibres da gravitação linearizada

Continuaremos usando aqui que $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$, em que γ_{ab} é considerado até a primeira ordem. Essa transformação pode em geral alterar a geometria ou ser mero difeomorfismo.

Vimos que uma variedade de Minkowski pode ser descrita por diferentes métricas expressas em dadas coordenadas (por exemplo, forma canônica da métrica ou em coordenadas esféricas). Tais transformações não alteram a física/geometria, e tratam-se de um tipo de difeomorfismo (caso passivo). Este último caso, por tratar de componentes de tensores, seria mais apropriadamente descrito através da equação $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$, em que $\gamma_{\mu\nu} = \mathcal{L}_v \eta_{\mu\nu}$, para algum vetor v^a. Isto pois, como vimos, transformações de coordenadas são casos particulares de difeomorfismos.

A notação $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$ a rigor trata de tensores em si, logo de mudanças da métrica devido a difeomorfismos ativos. Contudo, embora haja uma diferença de princípio relevante entre essas duas visões, a única diferença prática que encontramos é a diferença de notação usando os índices a, b ou μ, ν. Ressalta-se também que num contexto mais matemático, diz-se que duas variedades diferenciáveis são consideradas equivalentes (isomórficas) se há um difeomorfismo entre elas.

Se g_{ab} é metrica de uma variedade obtida via difeomorfismo de uma variedade Minkowskiana (de métrica η_{ab}), então $g_{ab} = \eta_{ab} + \mathcal{L}_v \eta_{ab}$. E usaremos essa notação independentemente de o difeomorfismo ser visto como passivou ou ativo.

Lembrete: Se v^a gerar uma **isometria** de η_{ab}, então $g_{ab} = \eta_{ab}$.

Em geral, γ_{ab} não é métrica obtida via difeomorfismo de da variedade de Minkowski. Assim, é importante separar o que se deve à mudança física/geométrica e mudanças de difeomorfismo (i.e., mudanças de coordendas e mudanças triviais da "geometria").

Para qualquer ξ^a, se substituirmos as perturbações γ_{ab} por

$$\gamma_{ab} \to \gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \mathcal{L}_\xi \eta_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a \, , \tag{55}$$

geometricamente nada muda. Neste sentido, a transformação acima é a "simetria de calibre" da RG.

Como $\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$, temos

$$\bar{\gamma}_{ab} \to \bar{\gamma}_{ab} + 2\partial_{(a}\xi_{b)} - \eta_{ab}\partial_c \xi^c \tag{56}$$

e

$$\partial^b \bar{\gamma}_{ab} \to \partial^b \bar{\gamma}_{ab} + 2\partial^b \partial_{(a}\xi_{b)} - \partial_a \partial_b \xi^b = \partial^b \bar{\gamma}_{ab} + \partial^b \partial_b \xi_a . \tag{57}$$

Assim, sempre é possível escolher um calibre (i.e., há um vetor ξ^a) tal que

$$\partial^b \bar{\gamma}_{ab} = 0 \, . \tag{58}$$

Este calibre é chamado de **calibre harmônico** (devido à eq. diferencial que ξ^a precisa satisfazer).

- **Exercício**: i) Demonstre a acessibilidade do calibre harmônico. ii) O calibre harmônico é capaz de fixar totalmente o calibre, ou há ainda alguma simetria residual que possa ser fixada?

Consequentemente, neste calibre,

$$\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab}. \tag{59}$$

Exercício: O **calibre síncrono** é definido por $\gamma_{0\mu} = 0$. Isto é, faz-se uma foliação da variedade, separando-a em seções espaciais parametrizadas por um parâmetro $t = x^0$ e considera-se que qualquer perturbação γ_{ab} só altera a geometria das seções espaciais. Mostre que esta fixação de calibre sempre é possível. Há alguma simetria residual?

Comentário sobre spin e gravitação (Fierz-Pauli)

Deduzimos as expressões acima no contexto de relatividade geral. É interessante notar que Fierz e Pauli fizeram um importante trabalho no qual tratam da dinâmica de um campos associados a partículas de diferente spin num fundo de Minkowski (notar que o artigo original pode ser baixado livremente). Em particular, consideraram a equação de campo associada a uma partícula de spin 2 não massiva e concluem que:

> *"In the particular case of spin 2, rest-mass zero, the equations agree in the force-free case with Einstein's equations for gravitational waves in general relativity in first approximation; the corresponding group of transformations arises from the infinitesimal coordinate transformations."*

Esse trabalho de Fierz e Pauli deu também a base para o tratamento de gravitação massiva (partícula de spin 2 com massa), que também está associado à bigravidade. Há atualmente vários trabalhos sobre gravitação massiva e bigravidade.

Limite Newtoniano

A partir de relativiade geral, devemos recobrar em certo limite a gravitação Newtoniana.

Para dado fluido não relativístico de densidade ρ, consideraremos que:

1. Limite de campo fraco. Ou seja, a perturbaçao linear γ_{ab} é suficiente para capturar a dinâmica gravitacional, sendo Minkowski o fundo.
2. Velociades baixas. Todos os corpos relevantes para o problema se movem com velocidade muito menor que a da luz.

Os dois requisitos acima são comumente mencionados explicitamente. Há um terceiro requisito que comumente é assumido (ele tem relação com o item 2 acima, mas não pode ser em geral obtido de 2):

3. Pressão e tensão são muito menores que a densidade de energia do fluido.

Localmente, sempre podemos aproximar a métrica por Minkowski, estamos interessados nas primeiras correções além de Minkowski.

As condições 2 e 3 impõe que o tensor energia-momento pode ser descrito por $T_{00} = \rho$ e que as demais componentes são suficientemente pequenas para não terem nenhuma relevância gravitacional.

Portanto, até primeira ordem em $\bar{\gamma}$, encontramos

$$-\ddot{\bar{\gamma}}_{00} + \nabla^2\bar{\gamma}_{00} = -16\pi G\, T_{00}\,, \tag{60}$$

$$-\ddot{\bar{\gamma}}_{0i} + \nabla^2\bar{\gamma}_{0i} = 0\,, \tag{61}$$

$$-\ddot{\bar{\gamma}}_{ij} + \nabla^2\bar{\gamma}_{ij} = 0\,. \tag{62}$$

Nota-se que os termos com derivada temporal não podem ser ignorados, considerando os argumentos 1, 2 e 3 acima, nenhum deles pode rigorosamente eliminar essas derivadas temporais. Mesmo a matéria se movendo lentamente, ainda assim essas derivadas podem ser importantes. Não é de se estranhar, pois nenhum desses itens é capaz de eliminar soluções de ondas gravitacionais.

Para eliminar as derivadas temporas sobre as perturbações, assim rumando para o limite Newtoniano, deve-se considerar mais um item:

4. A derivada temporal da métrica é suficientemente pequena para poder ser desprezada nas equações de campo.

Com este quarto item e, junto com $T_{00} = \rho$, temos

$$\nabla^2\bar{\gamma}_{00} = -16\pi G\,\rho\,, \tag{63}$$

$$\nabla^2\bar{\gamma}_{0i} = 0\,, \tag{64}$$

$$\nabla^2\bar{\gamma}_{ij} = 0\,. \tag{65}$$

A derivada temporal da métrica precisa ser pequena o suficiente para a derivada segunda não aparecer. Por outro lado, se ρ depender do tempo, $\bar{\gamma}_{00}$ vai também depender do tempo da mesma forma, e essa dependência temporal não precisa ser desprezada.

Das equações acima com a condição de contorno de $\bar{\gamma}_{ab}$ ser nulo em certa superfície fechada, concluímos que $\bar{\gamma}_{0i}$ e $\bar{\gamma}_{ij}$ são constantes.

Exercício: Mostre que as coordenadas podem ser mudadas tal que $\bar{\gamma}_{ij} = 0$. Dica: uma métrica constante pode sempre ser diagonalizada e em seguida "normalizada" para atingir a forma canônica Euclidiana ou de Minkowski. A primeira propriedade é consequência de toda matriz real simétrica poder ser diagonalizada por matrizes ortogonais, a segundo é um reescalonamento de coordenadas por meio de constante (i.e., $x^1 \to kx^1$). Observação: nenhuma dessas transformações por constantes altera a condição de calibre $\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$.

Questão: É possível satisfazer $\bar{\gamma}_{0i} = 0$ numa região finita?

Naturalmente, γ_{00} deve ter uma relação com o potencial Newtoniano, mas veremos isso de forma mais clara depois de avaliarmos a geodésica.

A eq. da geodésica nos diz que

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \tag{66}$$

Como $U^\mu U_\nu = -1$,

$$-1 = (U^0)^2 g_{00} + 2U^0U^i g_{0i} + U^iU^j g_{ij}\,. \tag{67}$$

Para velocidades baixas, tomando U^i e γ_{ab} como perturbações, podemos escrever

$$-1 \approx (U^0)^2(-1+\gamma_{00})\,, \tag{68}$$

lembrando que $g_{0i} = \gamma_{0i}$.

Assim, a eq. da geodésica pode ser expressa por

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \approx -\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\gamma_{00}}{x^\mu}\,. \tag{69}$$

Acima, convenientemente supuzemos que certas grandezas eram suficientemente pequenas. No formalismo pós-Newtoniano (PN), detalha-se quais os pesos de cada uma dessas grandezas (em particular γ_{ab} precisa ser aproximadamente igual ao quadrado de U^i. Neste curso de RG I não veremos o formalismo PN.

Como Γ^0_{00} é muito menor que os demais (devido ao termo $\propto \dot{\gamma}_{00}$), temos $\frac{d^2x^0}{d\tau^2} \approx 0$, logo $t = x^0 = a + b\tau$, em que a e b são constantes. Consequentemente, em particular, $U^i \approx \dot{x}^i$.

Podemos então escrever que

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^i}\,, \tag{70}$$

$$\nabla^2\bar{\gamma}_{00} = 16\pi G\rho\,. \tag{71}$$

Como $\bar{\gamma}_{00} = \gamma_{00} + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\gamma_{00}$, temos que o potencial Newtoniano é dado por

$$\phi = \frac{1}{2}\gamma_{00} \tag{72}$$

Exercício: Refaça em detalhes os passos acima do limite Newtoniano. Isto é bastante importante. No contexto desta apresentação, estamos buscando por limites em que possamos obter gravitação Newtoniana a partir de relatividade geral. O formalismo pós-Newtoniano "axiomatiza" esse processo e vai além. Além do Wald, ver em outras fontes. O Weinberg por exemplo.

Exercício: Problema 4.3 do Wald.

Ondas gravitacionais