

# **Teoria Eletromagnética II**

**Apresentação e  
revisão de tópicos de TE I**

Prof. Davi C. Rodrigues  
Período 2020/2 (EARTE)  
Fevereiro/2021

# Programa e bibliografia

## - Apresentação geral da disciplina

## - Revisão de tópicos de TE I

## - Eletrodinâmica (P1)

-- Força eletromotriz

-- Indução eletromagnética

-- Equações de Maxwell e problemas de contorno

## - Leis de Conservação (P2)

-- Carga

-- Energia

-- Momento

## - Ondas eletromagnéticas (P2)

-- Revisão de equação de ondas

-- Ondas eletromagnéticas no vácuo

-- Ondas eletromagnéticas na matéria

## - Campos e potenciais (P3)

-- Princípios gerais

-- Potenciais retardados

-- Potenciais de Liénard-Wiechert

## - Radiação (P3)

-- Radiação de dipolo

-- Reação à radiação

## - Eletrodinâmica relativística (P4)

— Sucinta apresentação de relatividade especial

-- Eletrodinâmica relativística e sua formulação covariante

## Livro principal:

GRIFFITHS, D. J. Introduction to Electrodynamics, 3rd Edition.  
(Corresponde à primeira edição em português) — Livro muito comum de ser adotado.

## Outros livros recomendados:

REITZ; CHRISTY ; MILFORD, Fundamentos da teoria eletromagnética. — É um livro mais antigo, mas tem seus méritos

=> ZANGWILL - Modern Electrodynamics — Mais moderno e avançado, mas ainda num nível de graduação, logo mais suave que um Jackson. Começa pelas equações de Maxwell.

# Aulas

Pretendo dar aulas ao vivo mais centradas em slides.

As aulas ao vivo apresentarão a matéria de forma sucinta.

Haverá exercícios para vocês fazerem, para estudo, sem valer nota.

Em caso de dúvidas (exercícios ou matéria em geral), me avisem em sala de aula ou me escrevam ([davi@cosmo-ufes.org](mailto:davi@cosmo-ufes.org)).

Há um espaço no google classroom para esta disciplina:  
<https://classroom.google.com/c/MjY3NjgoMzEyMjE5>

Inscrevam-se na página acima!

A presença nas aulas síncronas é obrigação dos alunos. Em caso de problemas me avise.

Eu tenho uma conta no Zoom e prefiro o Zoom que o Meets. Podemos fazer um teste rápido.

[https://us02web.zoom.us/j/81607380890?](https://us02web.zoom.us/j/81607380890?pwd=NlNlRThtcllvZUwzOGoxVDA1V1Njdzo9)  
[pwd=NlNlRThtcllvZUwzOGoxVDA1V1Njdzo9](https://us02web.zoom.us/j/81607380890?pwd=NlNlRThtcllvZUwzOGoxVDA1V1Njdzo9)

As aulas ao vivo serão gravadas. Irei disponibiliza-las, quando necessário, aos alunos com falta justificada. As aulas gravadas são somente para este fim, não podem ser compartilhadas com outros.

# Provas

## Provas:

4 provas antes da final (P1, P2, P3 e P4).

A média, antes da final, é a média entre as três melhores notas das 4 provas.

Cada avaliação será constituída por uma lista de questões a serem resolvidas, individualmente e sem copiar de nenhuma fonte, em até 48 horas. Os alunos poderão consultar livros ou outras fontes escritas, mas não poderão simplesmente copiar uma resolução. Terão de entendê-la e expressar com suas palavras. Resoluções muito semelhantes, que indiquem cópia de alguma fonte, poderão anular a avaliação.

Prova final: Farão prova final os alunos com menos de 7,0 de nota na média anterior. Esta prova será em horário da aula, síncrona. Esta prova será planejada considerando um tempo de 1 hora e 40 minutos para os alunos a resolverem, deixando 20 minutos para os alunos a enviarem eletronicamente.

Distribuição da matéria nas provas:

- Eletrodinâmica (**P1**)
- Leis de Conservação (**P2**)
- Ondas eletromagnéticas (**P2**)
- Campos e potenciais (**P3**)
- Radiação (**P3**)
- Eletrodinâmica relativística (**P4**)

**Datas das provas:** todas começam às 10:00 no horário de nossa aula:

- 23/02 — P1
- 23/03 — P2
- 20/04 — P3
- 11/05 — P4
- 20/05 — Final

# Tópicos de Revisão

- Constantes e unidades do SI (2019).
- Força de Lorentz.
- Como encontrar **E** e **B** na eletrostática e na magnetostática?
  - ▶ Densidade de carga de uma carga pontual?
  - ▶ Caso de partícula e correntes unidimensionais vs o caso geral.
- Teorema de Helmholtz.
- Os campos **E** e **B** existem ou são técnicas?
- Eletrostática e magnetostática na matéria.



# Constantes e unidades básicas do SI (2019)

- O livro texto (e a maioria dos livros de graduação de TE I) usa o SI. Visitem <https://www.bipm.org/en/measurement-units/> . Houve mudanças em 2019.
- O SI é um conjunto de convenções de unidades, inspirado em observações e teorias físicas.
- Nem sempre é o sistema de unidades mais conveniente, mas é importante saber usá-lo.



As 7 constantes básicas do SI



Unidades básicas do SI  
(por motivos históricos)

Exemplo para o ampere:



This definition implies the exact relation  $e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ A s}$ . Inverting this relation gives an exact expression for the unit ampere in terms of the defining constants  $e$  and  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ :

$$1\text{A} = \left( \frac{e}{1.602\,176\,634 \times 10^{-19}} \right) \text{s}^{-1}$$

which is equal to

$$1\text{A} = \frac{1}{(9\,192\,631\,770)(1.602\,176\,634 \times 10^{-19})} \Delta\nu_{\text{Cs}} e \approx 6.789\,687 \times 10^8 \Delta\nu_{\text{Cs}} e$$

The effect of this definition is that one ampere is the electric current corresponding to the flow of  $1/(1.602\,176\,634 \times 10^{-19})$  elementary charges per second.

# Breve observação sobre notação vetorial

- Ao escrever à mão recomenda-se usar a seta:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ .
- O mais usual para textos digitados é usar negrito:  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ .
- O padrão da notação vetorial requer cuidados com os símbolos de multiplicação “.” e “×”.
  - ▶ Entre escalares, o produto é um espaço (ou nada) entre os escalares:  $\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ , ou  $V \phi$ . Não usar  $V \cdot \phi$ .
  - ▶ O mesmo vale para o produto entre um escalar e um vetor:  $\epsilon_0 \mathbf{E}$ , ou  $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ . Não usar  $m \cdot \mathbf{a}$ .
  - ▶ Para o produto entre números, não há regra rígida, mas um padrão comum é usar ×. Exemplo:  $9,123 \times 10^{22}$ , ou  $2 \times 2$ . Note que entre números um mero espaço não pode ser usado, pois gera confusão.

# Força de Lorentz para uma partícula

- A força sentida por uma partícula teste de carga  $q$  e velocidade  $\mathbf{v}$  é

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Questão:  $\mathbf{v}$  é campo vetorial?  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são campos vetoriais (polares) ou campos pseudovetoriais?

- **Exercício:** Nota-se que o trabalho gerado por um campo magnético é nulo. Mostre.



# Força de Lorentz para uma partícula

- A força sentida por uma partícula teste de carga  $q$  e velocidade  $\boldsymbol{v}$  é

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

- Questão:  $\boldsymbol{v}$  é campo vetorial?  $\boldsymbol{E}$  e  $\boldsymbol{B}$  são campos vetoriais (polares) ou campos pseudovetoriais?

Resp.: Pode-se escrever:  $\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})]$ .

$\boldsymbol{v}$  (tal como  $\boldsymbol{F}$ ) para este caso é um vetor, não é campo vetorial.

$\boldsymbol{E}$  precisa ser campo vetorial (polar) e  $\boldsymbol{B}$  campo pseudovetorial. — Precisa ser assim, caso contrário  $\boldsymbol{F}$  não seria um vetor.

- **Exercício:** Nota-se que o trabalho gerado por um campo magnético é nulo. Mostre.

# Campo elétrico e força de Coulomb

- A força de Coulomb advém de experimentos e é expressa por (SI):

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

- Acima é a força sentida pela partícula 1 devido à partícula 2. No contexto da **eletrostática**.
- $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo e vale aproximadamente  $\epsilon_0 \approx 8,9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{m}^2\text{N})$ .
- Alternativamente,

$$\mathbf{F}_{1,2} = q_1 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1)$$

com

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2}$$

# Combinação de campos elétricos

- E se o campo elétrico for gerado por mais de uma carga? Vale a combinação linear?

# Combinação de campos elétricos

- E se o campo elétrico for gerado por mais de uma carga? Vale a combinação linear?
- Sim, vale. Duas possíveis justificativas para esta pergunta são:
  - Forma mais completa: Devido às equações de Maxwell serem lineares em  $E$  e nas fontes.
  - Sem precisar entrar nos detalhes das equações de Maxwell: Sim trata-se de um princípio que é verificado experimentalmente para o eletromagnetismo: é o princípio de superposição dos campos elétricos.
- Cuidado ao fazer combinações lineares. Embora as equações do eletromagnetismo sejam lineares, tem de se tomar cuidado em saber o que satisfaz combinações lineares e o que não satisfaz. **Exercício:** Considere exemplos, no contexto do eletromagnetismo, em que a combinação linear não seja válida.

# Aplicando o princípio de superposição

- Para um conjunto de N partículas,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n q_n \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r_n^2}$$

- Para uma distribuição contínua de carga, usando o princípio de superposição e  $dq = \rho d^3x$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'$$

- **Exercício:** Verifique que  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  e  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ . Lembrete:  $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ .

Para o último caso do exercício acima, é importante saber delta de Dirac. Se não souber, volte mais tarde para este exercício.



$$\rho \longrightarrow q?$$

- Vimos como passar do caso de partícula para o caso contínuo. Mas e como fazer a operação inversa?

- Para isso precisamos saber qual a densidade de carga de uma partícula (na origem)

Resp.: No espaço 3D:  $\rho(\mathbf{r}) = q\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ . Numa curva (espaço 1D):  $\lambda(x) = q\delta(x)$

- Por que usar a delta de Dirac para essas densidades?

$$\int_a^b \delta(x)dx = 1 \text{ se } 0 \in (a, b) \quad \text{e} \quad \int_a^b \delta(x)dx = 0 \text{ se } 0 \notin (a, b).$$

De forma geral, a delta de Dirac é definida por

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0) \text{ se } 0 \in (a, b) \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)\delta(x)dx = 0 \text{ se } 0 \notin (a, b).$$

- Logo ela é algo que só contribui na integral num único ponto do domínio de integração.
- Ela não é uma função (nenhuma função pode satisfazer essa propriedade).

$$\rho \longrightarrow q!$$

- Usando a delta de Dirac para uma carga pontual...

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V q\delta^3(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Que é a expressão do campo elétrico gerada por uma carga pontual.

**Exercício:** A partir da expressão do campo elétrico para uma densidade de carga  $\rho$ , encontre a expressão do campo elétrico gerado por 3 cargas  $q_1, q_2$  e  $q_3$ , que estão respectivamente em  $\mathbf{r}_1 = 2\hat{\mathbf{i}}, \mathbf{r}_2 = 3\hat{\mathbf{j}}$  e  $\mathbf{r}_3 = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ .

**Exercício:** A partir da expressão do potencial eletrostático  $V$  para uma densidade de carga  $\rho$ , encontre a expressão de  $V$  gerado por uma esfera de raio  $r = a$ . Dica: Primeiro você usará a delta de Dirac para transformar a integral de volume numa de superfície, depois você deve conseguir fazer essa integral de superfície (você já deve ter feito isso em TE I e física III).

# Magnetostática

- Campos magnéticos não são gerados por cargas magnéticas pontuais e estáticas. Não há nenhum exemplo conhecido de matéria completamente estática que gere campo magnético. Um ímã, por exemplo, embora macroscopicamente parado, só consegue gerar campo magnético devido ao seu movimento interno de cargas.
- Assim, a magnetostática não é uma teoria completamente estática, ela é microscopicamente um problema estacionário: as cargas que a geram não estão em repouso, suas posições dependem do tempo. É o fluxo de cargas, a corrente, que é independente do tempo. Semelhantemente, o sistema solar é um sistema aproximadamente estacionário, mas certamente não estático.
- Uma pergunta que iremos responder mais tarde é: o que seria observado se mudássemos de referencial, tal que estivéssemos em repouso com respeito a uma corrente elétrica? A mudança de referencial anularia o campo magnético?

# Correntes

- Uma corrente unidimensional (cargas que se movem ao long de um fio) é dada por

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$$

A velocidade aqui é um campo vetorial, para cada ponto no fio temos uma velocidade.  $\mathbf{I}$  tem dimensão de Q/T

- Para uma corrente bidimensional (cargas ao longo de uma superfície),

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$

- Para uma corrente tridimensional (cargas que se movem num volume),

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

- Notem que podemos adotar a última como definição, e obter as demais como casos particulares, usando deltas de Dirac apropriadamente. Por exemplo, para uma corrente que se localiza na superfície de um cilindro de raio  $A$ , sendo  $R$  a coordenada radial cilíndrica,

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \delta(R - A) \sigma \mathbf{v} = \delta(R - A) \mathbf{K}$$

- Nenhuma corrente ou densidade no espaço 3D é uma delta de Dirac, mas há vários exemplos em que isso é uma boa aproximação. A delta “mata” as dimensões não relevantes.



# Correntes

- Uma corrente unidimensional (cargas que se movem ao long de um fio) é dada por

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$$

A velocidade aqui é um campo vetorial, para cada ponto no fio temos uma velocidade.  $\mathbf{I}$  tem dimensão de Q/T

- Para uma corrente bidimensional (cargas ao longo de uma superfície),

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$

- Para uma corrente tridimensional (cargas que se movem num volume),

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

- Notem que podemos adotar a última como definição, e obter as demais como casos particulares, usando deltas de Dirac apropriadamente. Por exemplo, para uma corrente que se localiza na superfície de um cilindro de raio  $A$ , sendo  $R$  a coordenada radial cilíndrica,

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \delta(R - A) \sigma \mathbf{v} = \delta(R - A) \mathbf{K}$$

- Nenhuma corrente ou densidade no espaço 3D é uma delta de Dirac, mas há vários exemplos em que isso é uma boa aproximação. A delta “mata” as dimensões não relevantes.



# Correntes

Pode-se também escrever

$$d\mathbf{I} = \mathbf{J} da_{\perp}$$

Para simplificar as coordenadas, considere um fio ao longo do eixo-x, logo

$$d\mathbf{I} = \mathbf{J} da_{\perp} = \delta(y)\delta(z)\mathbf{I} dydz \implies \int d\mathbf{I} = \mathbf{I}$$

ao longo de um fio) é dada por

A velocidade aqui é um campo vetorial, para cada ponto

no fio temos uma velocidade.  $\mathbf{I}$  tem dimensão de Q/T

de uma superfície),

$\mathbf{v}$

vem num volume),

definição, e obter as demais como casos

particulares, usando deltas de Dirac apropriadamente. Por exemplo, para uma corrente que se localiza na superfície de um cilindro de raio  $A$ , sendo  $R$  a coordenada radial cilíndrica,

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \delta(R - A) \sigma \mathbf{v} = \delta(R - A) \mathbf{K}$$

- Nenhuma corrente ou densidade no espaço 3D é uma delta de Dirac, mas há vários exemplos em que isso é uma boa aproximação. A delta “mata” as dimensões não relevantes.

# Encontrando $\mathbf{B}$ a partir de corrente 1D

- Para dada corrente unidimensional,  $\mathbf{B}$  pode ser encontrado a partir da lei de **Biot-Savart**,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{I}(\boldsymbol{\ell}) \times \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\eta^2} d\boldsymbol{\ell}$$

Circuito 1D de integração.

Esta segunda equação é só uma mudança de notação.

- $\mu_0$  é a permeabilidade do vácuo,  $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ . Atualmente é uma aproximação, esta já foi a definição exata de  $\mu_0$ .
- Como fazer o “r fresco” que o Griffiths usa não é fácil, acima usei  $\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}$ .
- O uso de  $\boldsymbol{\ell}$  na lei de Biot-Savart é bastante comum, mas serve apenas para frisar que a integração é feita uma região 1D. É correto simplesmente usar  $d\mathbf{r}'$  ao invés de  $d\boldsymbol{\ell}$  (com cuidado).
- Caso a corrente seja constante ao longo do circuito  $C$ , é conveniente usar

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\eta^2}$$

É correto pois  $\mathbf{I} \propto \mathbf{v} \propto d\mathbf{r}'|_C$ .

# Encontrando $\mathbf{B}$ a partir de corrente 3D

- Usando o princípio de superposição, encontra-se

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\eta}}{\eta^2} d\tau'$$

Há várias outras possíveis pequenas variações de notação. A do Griffiths é a segunda.

- A lei de Biot-Savart para corrente  $\mathbf{I}$  é um caso particular da expressão acima.
- Uma corrente estacionária é definida por  $\dot{\mathbf{J}} = \partial_t \mathbf{J} = \mathbf{0}$ . Veremos depois em mais detalhes, mas essa relação é equivalente a exigir que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ .
- **Exercício:** Assumindo que a corrente seja estacionária, mostre que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- Encontramos 4 equações fundamentais para a eletrostática e magnetostática: duas para  $\mathbf{E}$  e duas para  $\mathbf{B}$ , desacopladas entre si.

# Teorema de Helmholtz

- Existem diferentes formulações do teorema de Helmholtz que são essencialmente equivalentes.
- Esse teorema (ou seus corolários) dizem *em essência* que:

- Qualquer campo vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  em  $\mathbb{R}^3$  pode ser decomposto em

$$\mathbf{F} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{A}$$

- Se o  $\nabla \times \mathbf{F}$  e  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  são conhecidos em todo  $\mathbb{R}^3$ , então  $\mathbf{F}$  pode ser determinado.
- Para dado  $\mathbf{F}$  conhecido num volume  $\tau \subset \mathbb{R}^3$ , os potenciais  $V$  e  $\mathbf{A}$  podem ser escritos como funcionais de  $\nabla \times \mathbf{F}$  e  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  nesse volume além de certos termos de superfície.
- Os resultados acima são frequentemente usados no contexto do eletromagnetismo.
- Garantem que as equações diferenciais que fixam divergente e rotacional (em particular de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , do potencial vetor  $\mathbf{A}$  num certo calibre, dentre outros casos) determinam de forma única a solução (e dizem como encontrá-la).



# Teorema de Helmholtz

- Existem diferentes formulações do teorema de Helmholtz.
- Esse teorema (ou seus corolários) dizem *em essência* que:
- Qualquer campo vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  em  $\mathbb{R}^3$  pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = -\nabla V - \nabla \times \mathbf{A}$$

- Se o  $\nabla \times \mathbf{F}$  e  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  são conhecidos em todo o espaço, então  $\mathbf{F}$  é determinado unicamente.
- Para dado  $\mathbf{F}$  conhecido num volume  $\tau \subset \mathbb{R}^3$ , os valores das funcionais de  $\nabla \times \mathbf{F}$  e  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  nesse volume além de certos termos de superfície determinam  $\mathbf{F}$  em todo o espaço.
- Os resultados acima são frequentemente usados no contexto do eletromagnetismo.
- Garantem que as equações diferenciais que fixam divergente e rotacional (em particular de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , do potencial vetor  $\mathbf{A}$  num certo calibre, dentre outros casos) determinam de forma única a solução (e dizem como encontrá-la).

Os detalhes do teorema e sua demonstração completa podem ser vistos, por exemplo, no Griffiths (apêndice), Zangwill (seção 1.9) e na [Wikipedia](#).

Cada um deles fazem a apresentação e a demonstração de forma um pouco diferente.

além de certos termos de superfície.



# Os campos E e B existem ou são técnicas?

- Discussão...
- Pode-se medir E e B diretamente?
- Para que servem as equações de Maxwell sozinhas?
- Semelhantemente, a equação para o potencial gravitacional isoladamente serve para algo?

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Poderíamos só falar de forças e ignorarmos os campos?

# Eletrostática na matéria

- A primeira coisa a ser entendida é o que “na matéria” quer dizer.
- Uma onda eletromagnética num vidro não viaja num meio homogêneo diferente do vácuo; entre uma molécula e outra há vácuo.
- Se este eletromagnetismo que vamos tratar é “na matéria” então o anterior era no vácuo? Se era no vácuo, não deveríamos ter  $\rho = 0$  e  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ?
- Discussão...
-

# Eletrostática na matéria

- A primeira coisa a ser entendida é o que “na matéria” quer dizer.
- Uma onda eletromagnética num vidro não viaja num meio homogêneo diferente do vácuo; entre uma molécula e outra há vácuo.
- Se este eletromagnetismo que vamos tratar é “na matéria” então o anterior era no vácuo? Se era no vácuo, não deveríamos ter  $\rho = 0$  e  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ?
- Discussão...
- Ao dizer “na matéria” quer dizer que estamos considerando um meio cujos efeitos microscópicos de cargas positivas e negativas, ligadas entre si, são considerados de forma efetiva. Devido a parte (ou a totalidade) da carga negativa (elétrons) estar presa a estruturas positivas (átomos, por exemplo), campos elétricos e magnéticos influenciam essa distribuição sem quebrá-la. E essa distribuição gera também um campo eletromagnético.
- A matéria em questão pode ou não ter cargas ou correntes livres (possivelmente formada por uma parte dos elétrons que não está presa a certa pequena região).

# Infinitos dipolos: Polarização

- O potencial de um único momento de dipolo  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  é dado por

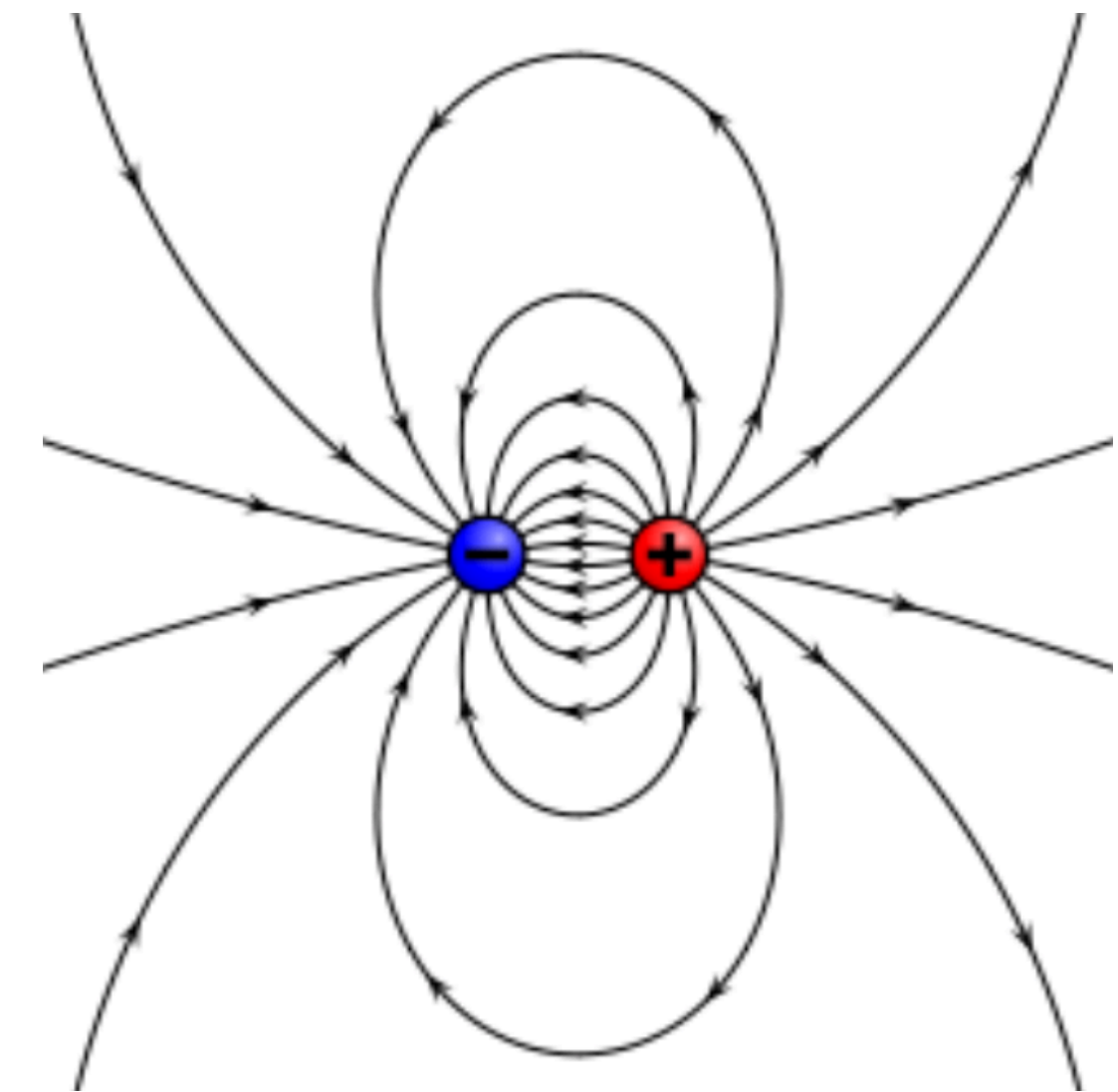
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2}$$

- Se o meio em questão tem muitos dipolos, um bem próximo ao outro, pode-se falar em densidade de momento de dipolo, ou polarização  $\mathbf{P}$ .

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{r^2} d\tau' = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau'$$

A eq. acima é válida a menos de um termo de superfície, que não iremos considerar. Logo,

$$\rho_b \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}$$



# Campo de deslocamento elétrico: $\mathbf{D}$

- Além da distribuição de cargas presas, denotada por  $\rho_b$ , é possível que haja cargas adicionais não presas à estrutura da matéria, denotadas por  $\rho_f$  (b e f vêm do inglês, *bound* e *free*). Assim,

$$\rho = \rho_b + \rho_f$$

- Logo,

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_f$$

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

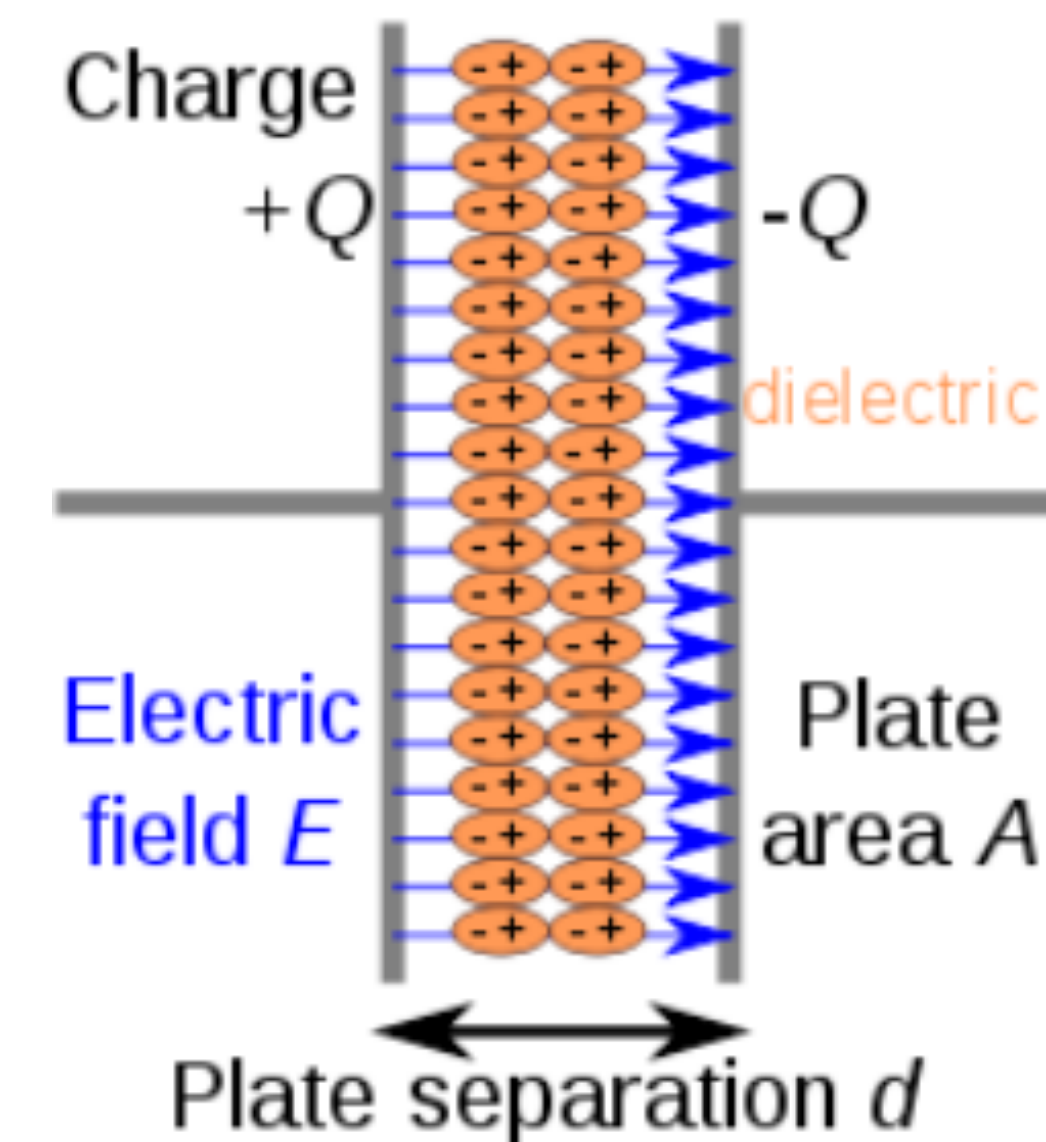
- E assim pode-se escrever as eq's da eletrostática tendo como fonte a carga livre,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$



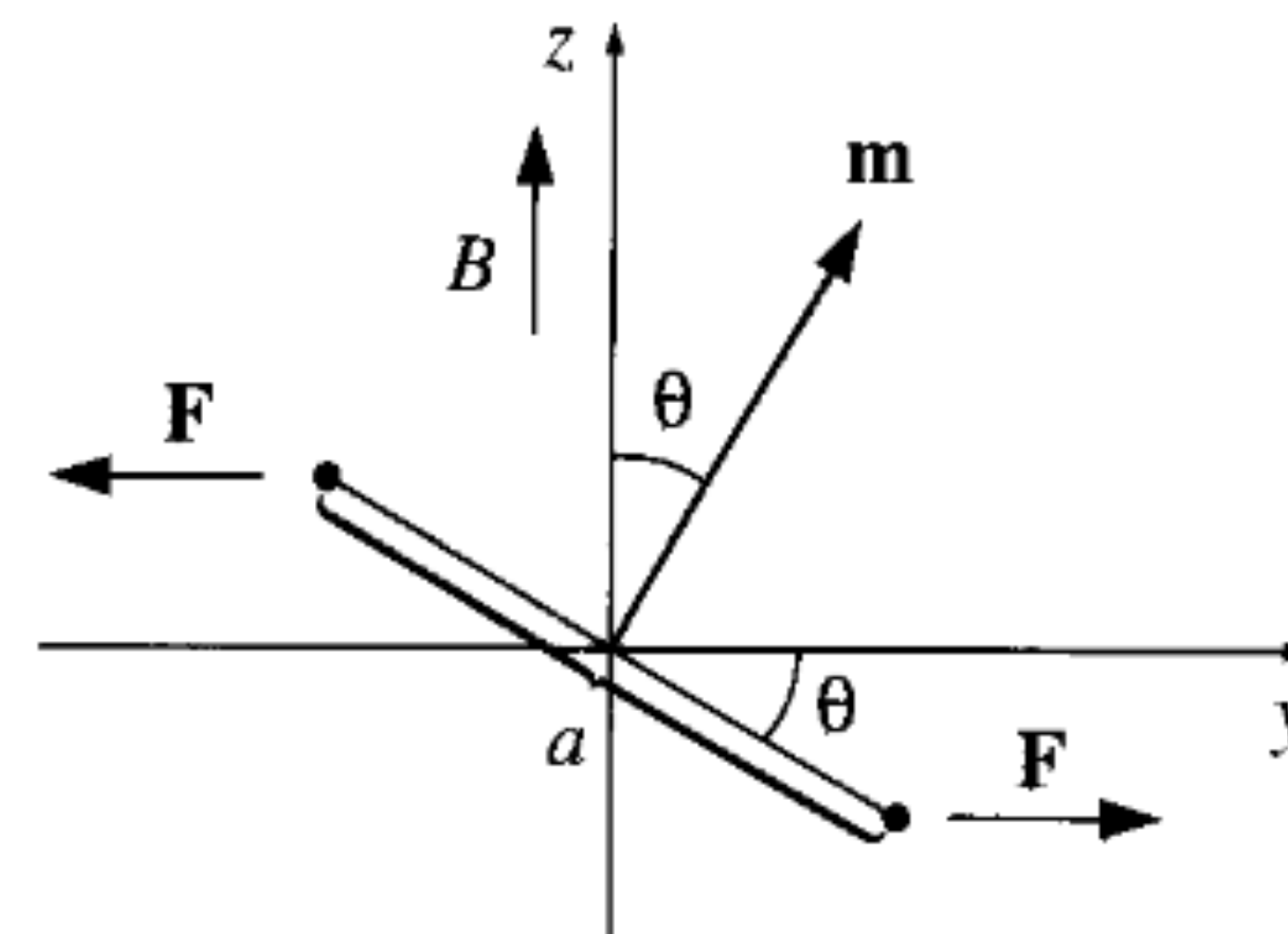
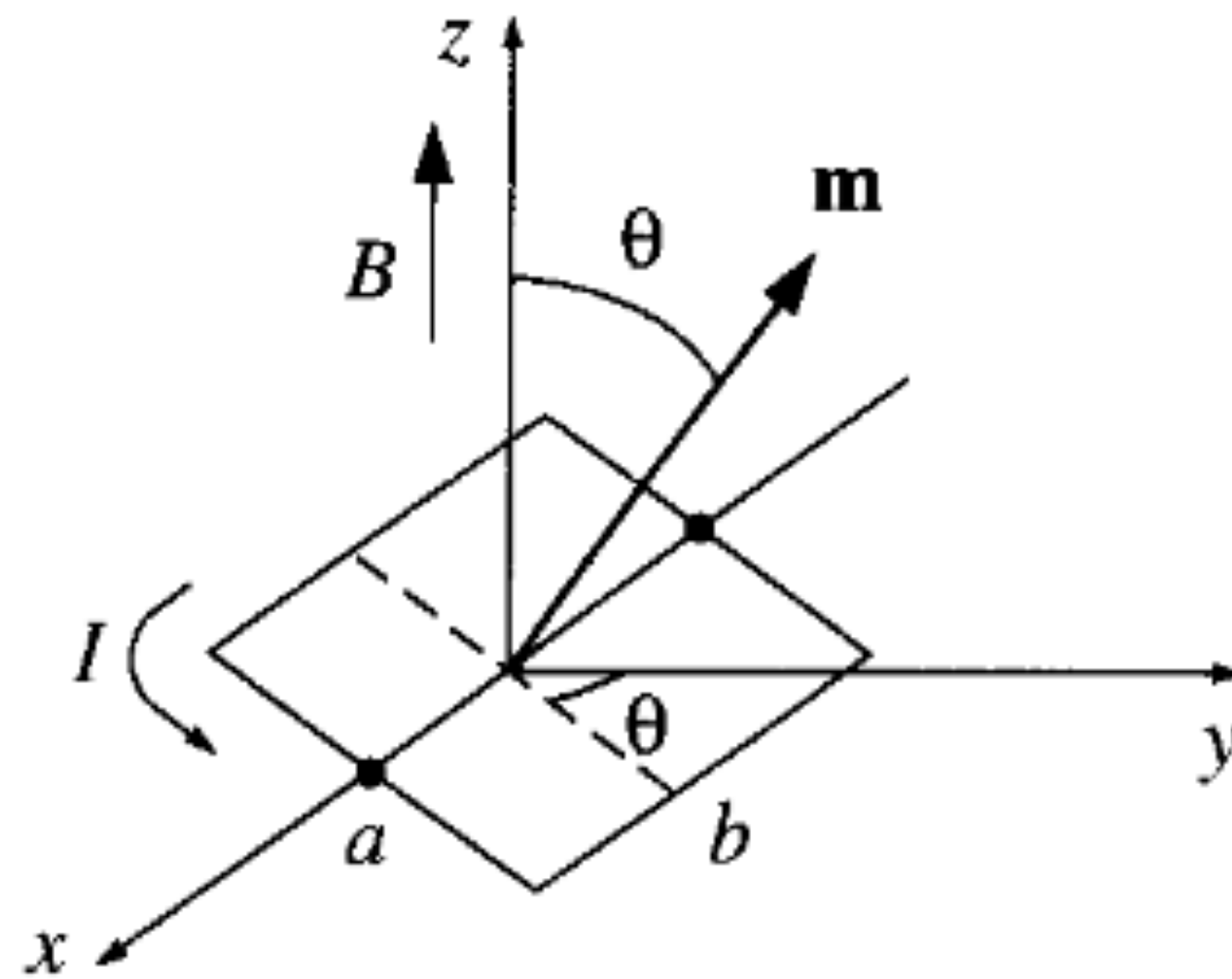
# Permissividade do material: $\epsilon$

- A permissividade do vácuo  $\epsilon_0$  é, para a eletrodinâmica, uma constante fundamental. A única forma de saber seu valor é por meio de experimentos.
- Para muitos materiais (não todos!), a polarização é proporcional ao campo elétrico local. Sendo essa constante global para o material, o material é chamado de **dielétrico linear e homogêneo**. Se a constante depende ponto a ponto do material, trata-se de um **dielétrico linear não homogêneo**. Para o case de qualquer dielétrico linear,  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , em que  $\epsilon$  é uma constante ou função da posição.
- Note que (devido a exóticos motivos históricos) as dimensões de  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  não são iguais, logo mesmo no vácuo eles são diferentes.
- De forma mais geral,  $\epsilon$  pode ser uma função do próprio campo  $\mathbf{E}$  e é possível que a polarização não seja paralela ao campo elétrico. Em TE I e II ênfase é dada aos meios lineares. Materiais ferroelétricos, por exemplo, não são dielétricos lineares.



# Dipolo magnético

- Considere a seguinte configuração, como na figura:



$$F = I b B$$

- A força resultante atuará na espira aproximando essa do caso em que o plano da espira é perpendicular a  $\mathbf{B}$ .
- Para o lado 1 da espira, haverá um torque  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \frac{a}{2} F_1 \sin \theta \hat{\mathbf{i}}$ . Consequentemente, sendo  $F = F_1 = F_2$ , para a espira total vem  $\mathbf{N} = a F \sin \theta \hat{\mathbf{i}}$ .

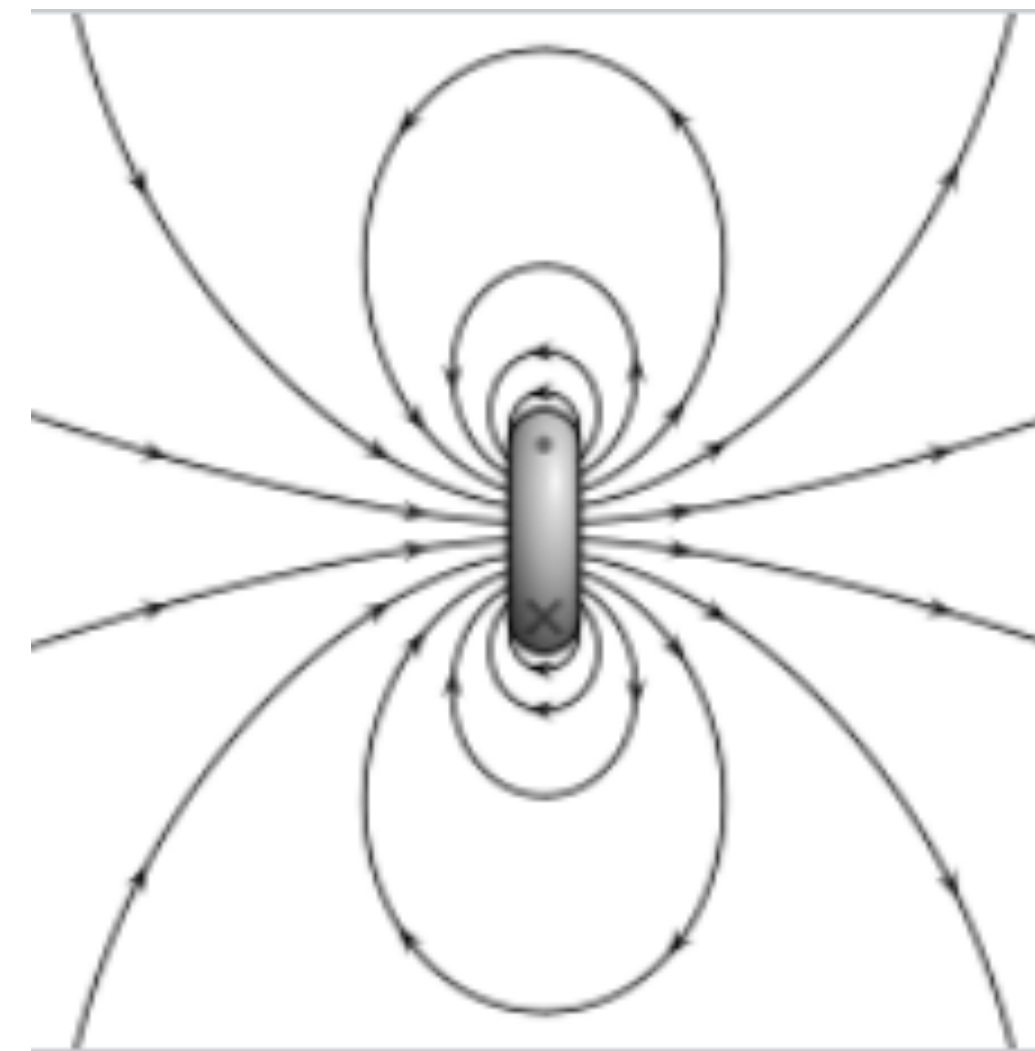
# Infinitos dipolos magnéticos: Magnetização

- Definimos o **momento de dipolo magnético**  $\mathbf{m}$  por

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

No exemplo anterior,  $m = Iab$ .

- Exercício:** Essa definição é diferente da usada para o momento de dipolo elétrico, mas verifique que, para dipolo elétrico,  $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ .
- Alguns materiais se tornam magnetizados na presença de campos magnéticos. Duas situações comuns são paramagnetismo e diamagnetismo (respectivamente, criam dipolos magnéticos microscópicos alinhados, ou anti-alinhados, com o campo magnético local). O livro apresenta (grosseiras) aproximações semi-clássicas para tais fenômenos.
- Exercício:** revise esses modelos (um está associado com momento de dipolo orbital de elétrons, outro com o spin dos mesmos).
- Um material com dipolos magnéticos microscópicos possui uma **magnetização**  $\mathbf{M}$ , que é uma densidade de momento de dipolo magnético.





# O campo de um objeto magnetizado

- Lembrando que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , encontra-se que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

- **Exercício:** Deduza a expressão acima. Em que calibre encontra-se essa expressão para  $\mathbf{A}$ ?
- Se o objeto em questão está magnetizado, então, pelo princípio de superposição,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] d\tau'$$

a menos de um termo de superfície, que foi desprezado (tal qual no caso elétrico).

- Da expressão do potencial vetor  $\mathbf{A}$  para uma densidade de corrente arbitrária, encontramos

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$$

# O campo $\mathbf{H}$

- Em materiais, é conveniente introduzir o campo

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

- Consequentemente as equações da magnetostática podem ser expressas por

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Semelhantemente à eletrostática, para materiais lineares em que a magnetização seja proporcional ao campo  $\mathbf{B}$ , como os paramagnéticos ou diamagnéticos, é conveniente usar

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

- Lembrar que  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ .



# Equações da eletrostática e magnetostática na matéria

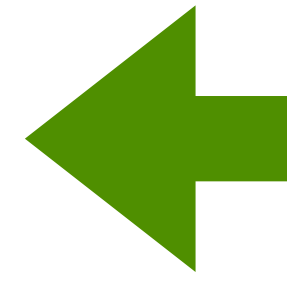
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

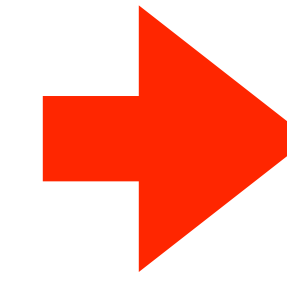
- Equações que definem o meio, “a matéria”:  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  e  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$ .

# Equações da eletrostática e magnetostática na matéria

Dependem do meio e  
contém as fontes.



$$\begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \end{array} \text{ e } \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{array}$$



Não mudam com  
o meio.

- Equações que definem o meio, “a matéria”:  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  e  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$ .