Teoria Eletromagnética II

Apresentação e
revisão de tópicos de TE I

Prof. Davi C. Rodrigues
Período 2022/2

Programa e bibliografia

- **Apresentaçõa geral da disciplina**
- Revisão de tópicos de TE I
- Eletrodinâmica (P1)
-- Força eletromotriz
-- Indução eletromagnética
-- Equações de Maxwell e problemas de contorno
- Leis de Conservação (P2)
-- Carga
-- Energia
-- Momento
- Ondas eletromagnéticas (P2)
-- Revisão de equação de ondas
-- Ondas eletromagnéticas no vácuo
-- Ondas eletromagnéticas na matéria
- Campos e potenciais (P3)
-- Princípios gerais
-- Potenciais retardados
-- Potenciais de Liénard-Wiechert
- Radiação (P3)
-- Radiação de dipolo
-- Reação à radiação
- Eletrodinâmica relativística (P4)
— Sucinta apresentação de relatividade especial
-- Eletrodinâmica relativística e sua formulação covariante

Livro principal:

GRIFFITHS, D. J. Introduction to Electrodynamics, 3rd Edition. (Corresponde à primeira edição em português) — Livro muito comum de ser adotado.

Outros livros recomendados:

REITZ; CHRISTY ; MILFORD, Fundamentos da teoria eletromagnetica. — É um livro mais antigo, mas tem seus méritos

=> ZANGWILL - Modern Electrodynamics — Mais moderno e avançado, mas ainda num nível de graduação, logo mais suave que um Jackson. Começa pelas equações de Maxwell.

Tópicos de Revisão

- Constantes e unidades do SI.
- Força de Lorentz.
- Como encontrar **E** e **B** na eletrostática e na magnetostática?
  - Densidade de carga de uma carga pontual?
  - Caso de partícula e correntes unidimensionais vs o caso geral.
- Teorema de Helmholtz.
- Os campos **E** e **B** existem ou são técnicas?
- Eletrostática e magnetostática na matéria.

Constantes e unidades básicas do SI

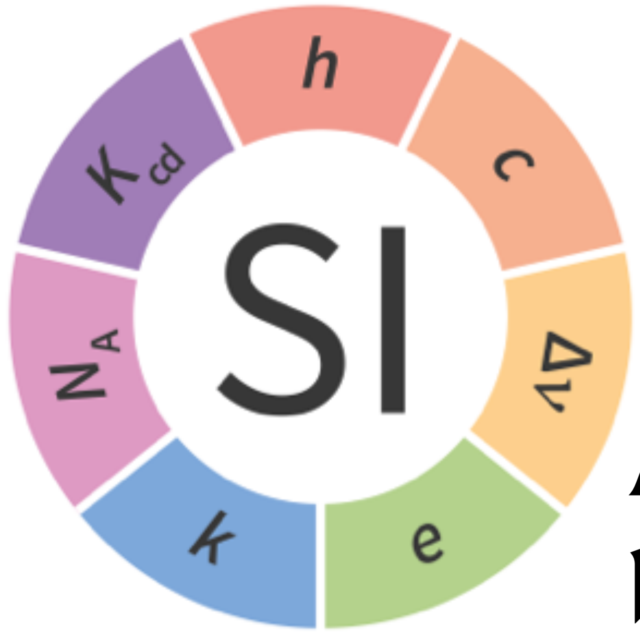
- O livro texto (e a maioria dos livros de graduação de TE I) usa o SI.
  Visitem https://www.bipm.org/en/measurement-units/ . Houve mudanças em 2019.
- O SI é um conjunto de convenções de unidades, inspirado em observações e teorias físicas.
- Nem sempre é o sistema de unidades mais conveniente.

The SI is the system of units in which

- the unperturbed ground state hyperfine transition frequency of the caesium-133 atom $\Delta\nu_{Cs}$ is 9 192 631 770 Hz
- the speed of light in vacuum c is 299 792 458 m/s
- the Planck constant h is 6.626 070 15 x 10^{-34} J s
- the elementary charge e is 1.602 176 634 x 10^{-19} C
- the Boltzmann constant k is 1.380 649 x 10^{-23} J/K
- the Avogadro constant N_A is 6.022 140 76 x 10^{23} mol^{-1}
- the luminous efficacy of monochromatic radiation of frequency 540 x 10^{12} Hz, K_{cd}, is 683 lm/W

Constantes e unidades básicas do SI

- O livro texto (e a maioria dos livros de graduação de TE I) usa o SI.
  Visitem https://www.bipm.org/en/measurement-units/ . Houve mudanças em 2019.
- O SI é um conjunto de convenções de unidades, inspirado em observações e teorias físicas.
- Nem sempre é o sistema de unidades mais conveniente.



As 7 constantes básicas do SI

Unidades básicas do SI

Exemplo:

The ampere, symbol A, is the SI unit of electric current. It is defined by taking the fixed numerical value of the elementary charge *e* to be 1.602 176 634 x 10^{-19} when expressed in the unit C, which is equal to A s, where the second is defined in terms of $\Delta\nu_{Cs}$.

This definition implies the exact relation e = 1.602 176 634 x 10^{-19} A s. Inverting this relation gives an exact expression for the unit ampere in terms of the defining constants e and $\Delta\nu_{Cs}$:

$$1\,\mathrm{A} = \left(\frac{e}{1.602\,176\,634\times10^{-19}}\right)\mathrm{s}^{-1}$$

which is equal to

$$1\,\mathrm{A} = \frac{1}{(9\,192\,631\,770)(1.602\,176\,634\times10^{-19})}\Delta\nu_{Cs}e \approx 6.789\,687\times10^{8}\,\Delta\nu_{Cs}e$$

The effect of this definition is that one ampere is the electric current corresponding to the flow of 1/(1.602 176 634 x 10^{-19}) elementary charges per second.

Breve observação sobre notação vetorial

- Ao escrever à mão recomenda-se usar a seta: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho$.
- O mais usual para textos digitados é usar negrito: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho$.
- O padrão da notação vetorial requer cuidados com os símbolos de multiplicação.
  - Entre escalares, o produto é um espaço (ou nada) entre os escalares: $\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho$, $V\,\phi$.... Não usar $V \cdot \phi$.
  - O mesmo vale para o produto entre um escalar e um vetor: $\epsilon_0\,\mathbf{E}$, $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ ... Não usar $m \cdot \mathbf{a}$.
  - Usa-se também $2\,\mathbf{E}$, $32\,\mathbf{F}$, $4\,\phi$...
  - Para o produto entre números, não há regra rígida, mas um padrão comum é usar $\times$. Exemplo: $9{,}123 \times 10^{22}$, ou 2×2. Entre números um mero espaço não pode ser usado, pois gera confusão.

Força de Lorentz para uma partícula

- A força sentida por uma partícula teste de carga q e velocidade **v** é

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Questão: **v** é campo vetorial? **E** e **B** são campos vetoriais (polares) ou campos pseudovetoriais ?

- **Exercício:** Nota-se que o trabalho gerado por um campo magnético é nulo. Mostre.

Força de Lorentz para uma partícula

- A força sentida por uma partícula teste de carga q e velocidade **v** é

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Questão: **v** é campo vetorial? **E** e **B** são campos vetoriais (polares) ou campos pseudovetoriais ?

Resp.: Pode-se escrever: $\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$.

v (tal como **F**) para este caso é um vetor, não é campo vetorial.

$\boldsymbol{E}$ precisa ser campo vetorial (polar) e **B** campo pseudovetorial. — Precisa ser assim, caso contrário **F** não seria um vetor.

- **Exercício:** Nota-se que o trabalho gerado por um campo magnético é nulo. Mostre.

Campo elétrico e força de Coulomb

- A força de Coulomb advém de experimentos e é expressa por (SI):

$$\boldsymbol{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

- Acima é a força sentida pela partícula 1 devido à partícula 2. No contexto da **eletrostática**.
- ϵ_0 é a permissividade do vácuo e vale aproximadamente $\epsilon_0 \approx 8{,}9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C}^2/(\mathrm{m}^2\mathrm{N})$.
- Alternativamente,

$$\boldsymbol{F}_{1,2} = q_1 \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}_1)$$

com

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_{1,2}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{1,2}$$

Combinação de campos elétricos

- E se o campo elétrico for gerado por mais de uma carga? Vale a combinação linear?

Combinação de campos elétricos

- E se o campo elétrico for gerado por mais de uma carga? Vale a combinação linear?

- Sim, vale. Duas possíveis justificativas para esta pergunta são:
  - Forma mais completa: Devido às equações de Maxwell serem lineares em $\boldsymbol{E}$ e nas fontes.
  - Sem precisar entrar nos detalhes das equações de Maxwell: Sim trata-se de um princípio que é verificado experimentalmente para o eletromagnetismo: é o princípio de superposição dos campos elétricos.

- Cuidado ao fazer combinações lineares. Embora as equações do eletromagnetismo sejam lineares, tem de se tomar cuidado em saber o que satisfaz combinações lineares e o que não satisfaz. **Exercício:** Considere exemplos, no contexto do eletromagnetismo, em que a combinação linear não seja válida.

Aplicando o princípio de superposição

- Para um conjunto de N partículas,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_n q_n \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r_n^2}$$

- Para uma distribuição contínua de carga, usando o princípio de superposição e $dq = \rho d^3x$,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}d^3r'$$

- **Exercício:** Verifique que $\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ e $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho$. Lembrete: $\nabla^2 \dfrac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$.

  Para o último caso do exercício acima, é importante saber delta de Dirac. Se não souber, volte mais tarde para este exercício.

$\rho \longrightarrow q$?

- Vimos como passar do caso de partícula para o caso contínuo. Mas e como fazer a operação inversa?
  - Para isso precisamos saber qual a densidade de carga de uma partícula (na origem)

    Resp.: No espaço 3D: $\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$. Numa curva (espaço 1D): $\lambda(x) = q\delta(x)$
  - Por que usar a delta de Dirac para essas densidades?

    $$\int_a^b \delta(x)dx = 1 \text{ se } 0 \in (a,b) \quad \text{e} \quad \int_a^b \delta(x)dx = 0 \text{ se } 0 \notin (a,b).$$

    De forma geral, a delta de Dirac é definida por

    $$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0) \text{ se } 0 \in (a,b) \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)\delta(x)dx = 0 \text{ se } 0 \notin (a,b).$$
  - Logo ela é algo que só contribui na integral num único ponto do domínio de integração.
  - Ela não é uma função (nenhuma função pode satisfazer essa propriedade).

$\rho \longrightarrow q!$

- Usando a delta de Dirac para uma carga pontual...

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V q\delta^3(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}d^3r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

Que é a expressão do campo elétrico gerada por uma carga pontual.

Exercício: A partir da expressão do campo elétrico para uma densidade de carga ρ, encontre a expressão do campo elétrico gerado por 3 cargas q_1, q_2 e q_3, que estão respectivamente em $\mathbf{r}_1 = 2\hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{r}_2 = 3\hat{\mathbf{j}}$ e $\mathbf{r}_3 = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$.

Exercício: A partir da expressão do potencial eletrostático V para uma densidade de carga ρ, encontre a expressão de V gerado por uma esfera de raio $r = a$. Dica: Primeiro você usará a delta de Dirac para transformar a integral de volume numa de superfície, depois você deve conseguir fazer essa integral de superfície (você já deve ter feito isso em TE I e física III).

Magnetostática

- Campos magnéticos não são gerados por cargas magnéticas pontuais e estáticas. Não há nenhum exemplo conhecido de matéria completamente estática que gere campo magnético. Um imã, por exemplo, embora macroscopicamente parado, só consegue gerar campo magnético devido ao seu movimento interno de cargas.
- Assim, a magnetostática não se refere a sistemas microscopicamente estáticos, ela trata, microscopicamente, de problemas estacionários: as cargas que geram campos magnéticos não estão em repouso, suas posições dependem do tempo. É o fluxo de cargas, a corrente, que é tratada como independente do tempo. Semelhantemente, o sistema solar é um sistema aproximadamente estacionário, mas certamente não estático.
- Uma pergunta que iremos responder mais tarde é: o que seria observado se mudássemos de referencial, tal que estivéssemos em repouso com respeito a uma corrente elétrica? A mudança de referencial anularia o campo magnético?

Correntes

- Uma corrente unidimensional (cargas que se movem ao long de um fio) é dada por

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$$

A velocidade aqui é um campo vetorial, para cada ponto no fio temos uma velocidade. ***I*** tem dimensão de Q/T

- Para uma corrente bidimensional (cargas ao longo de uma superfície),

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$

- Para uma corrente tridimensional (cargas que se movem num volume),

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

- Notem que podemos adotar a última como definição, e obter as demais como casos particulares, usando deltas de Dirac apropriadamente. Por exemplo, para uma corrente que se localiza na superfície de um cilindro de raio *A*, sendo *R* a coordenada radial cilíndrica,

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \delta(R - A)\sigma \mathbf{v} = \delta(R - A)\mathbf{K}$$

- Nenhuma corrente ou densidade no espaço 3D é uma delta de Dirac, mas há vários exemplos em que isso é uma boa aproximação. A delta “mata" as dimensões não relevantes.

Correntes

- Uma corrente unidimensional (cargas que se movem ao long de um fio) é dada por

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$$

A velocidade aqui é um campo vetorial, para cada ponto no fio temos uma velocidade. ***I*** tem dimensão de Q/T

- Para uma corrente bidimensional (cargas ao longo de uma superfície),

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$

- Para uma corrente tridimensional (cargas que se movem num volume),

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}}$$

- Notem que podemos adotar a última como definição, e obter as demais como casos particulares, usando deltas de Dirac apropriadamente. Por exemplo, para uma corrente que se localiza na superfície de um cilindro de raio *A*, sendo *R* a coordenada radial cilíndrica,

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \delta(R - A)\sigma \mathbf{v} = \delta(R - A)\mathbf{K}$$

- Nenhuma corrente ou densidade no espaço 3D é uma delta de Dirac, mas há vários exemplos em que isso é uma boa aproximação. A delta “mata" as dimensões não relevantes.

Correntes

Pode-se também escrever

$$d\mathbf{I} = \mathbf{J}\, da_\perp$$

Para simplificar as coordenadas, considere um fio ao longo do eixo-x, logo

$$d\mathbf{I} = \mathbf{J}\, da_\perp = \delta(y)\delta(z)\mathbf{I}\, dydz \Longrightarrow \int d\mathbf{I} = \mathbf{I}$$

ao long de um fio) é dada por

A velocidade aqui é um campo vetorial, para cada ponto no fio temos uma velocidade. I tem dimensão de Q/T

de uma superfície),

$\mathbf{v}$

ovem num volume),

finição, e obter as demais como casos particulares, usando deltas de Dirac apropriadamente. Por exemplo, para uma corrente que se localiza na superfície de um cilindro de raio A, sendo R a coordenada radial cilíndrica,

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} = \delta(R-A)\sigma\mathbf{v} = \delta(R-A)\mathbf{K}$$

- Nenhuma corrente ou densidade no espaço 3D é uma delta de Dirac, mas há vários exemplos em que isso é uma boa aproximação. A delta "mata" as dimensões não relevantes.

Encontrando B a partir de corrente 1D

- Para dada corrente unidimensional, **B** pode ser encontrado a partir da lei de **Biot-Savart**,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dr' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{\mathbf{I}(\boldsymbol{\ell}) \times \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\eta^2} d\ell$$

Esta segunda equação é só uma mudança de notação.

Circuito 1D de integração.

- μ_0 é a permeabilidade do vácuo, $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$. Atualmente é uma aproximação, esta já foi a definição exata de μ_0.

- Como fazer o ``r fresco'' que o Griffiths usa não é fácil, acima usei $\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}$.

- O uso de ℓ na lei de Biot-Savart é bastante comum, mas serve apenas para frisar que a integração é feita uma região 1D. É correto simplesmente usar dr' ao invés de $d\ell$ (com cuidado).

- Caso a corrente seja constante ao longo do circuito C, é conveniente usar

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\eta^2}$$

É correto pois $\mathbf{I} \propto \mathbf{v} \propto d\mathbf{r}'|_C$.

Encontrando B a partir de corrente 3D

- Usando o princípio de superposição, encontra-se

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\hat{\boldsymbol{\eta}}}{\eta^2}d\tau'$$

Há várias outras possíveis pequenas variações de notação. A do Griffiths é a segunda.

- A lei de Biot-Savart para corrente **I** é um caso particular da expressão acima.
- Uma corrente estacionária é definida por $\dot{\mathbf{J}} = \partial_t \mathbf{J} = \mathbf{0}$. Veremos depois em mais detalhes, mas essa relação é equivalente a exigir que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.
- **Exercício:** Assumindo que a corrente seja estacionária, mostre que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad\qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- Encontramos 4 equações fundamentais para a eletrostática e magnetostática: duas para **E** e duas para **B**, desacopladas entre si.

Teorema de Helmholtz

- Existem diferentes formulações do teorema de Helmoltz que são essencialmente equivalentes.
- Esse teorema (ou seus corolários) dizem *em essência* que:
  - Qualquer campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ em $\mathbb{R}^3$ pode ser decomposto em

$$\mathbf{F} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{A}$$

  - Se o $\nabla \times \mathbf{F}$ e $\nabla \cdot \mathbf{F}$ são conhecidos em todo $\mathbb{R}^3$, então $\mathbf{F}$ pode ser determinado.
  - Para dado $\mathbf{F}$ conhecido num volume $\tau \subset \mathbb{R}^3$, os potenciais V e $\mathbf{A}$ podem ser escritos como funcionais de $\nabla \times \mathbf{F}$ e $\nabla \cdot \mathbf{F}$ nesse volume além de certos termos de superfície.
- Os resultados acima são frequentemente usados no contexto do eletromagnetismo.
  - Garantem que as equações diferenciais que fixam divergente e rotacional (em particular de $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, do potencial vetor $\mathbf{A}$ num certo calibre, dentre outros casos) determinam de forma única a solução (e dizem como encontrá-la).

Teorema de Helmholtz

- Existem diferentes formulações do teorema d
- Esse teorema (ou seus corolários) dizem *em e*
  - Qualquer campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ em $\mathbb{R}^3$ pode

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

  - Se o $\nabla \times \mathbf{F}$ e $\nabla \cdot \mathbf{F}$ são conhecidos em tod
  - Para dado $\mathbf{F}$ conhecido num volume $\tau \subset$
    funcionais de $\nabla \times \mathbf{F}$ e $\nabla \cdot \mathbf{F}$ nesse volume além de certos termos de superfície.

Os detalhes do teorema e sua demonstração completa podem ser vistos, por exemplo, no Griffiths (apêndice), Zangwill (seção 1.9) e na [Wikipedia].

Cada um deles faz a apresentação e a demonstração de forma um pouco diferente.

- Os resultados acima são frequentemente usados no contexto do eletromagnetismo.
  - Garantem que as equações diferenciais que fixam divergente e rotacional (em particular de $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, do potencial vetor $\mathbf{A}$ num certo calibre, dentre outros casos) determinam de forma única a solução (e dizem como encontrá-la).

Os campos E e B existem ou são técnicas?

- Discussão...
- Pode-se medir E e B diretamente?
- Para que servem as equações de Mawell sozinhas?

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Semelhantemente, a equação para o potencial gravitacional isoladamente serve para algo?

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

Poderíamos só falar de forças e ignorarmos os campos?

Eletrostática na matéria

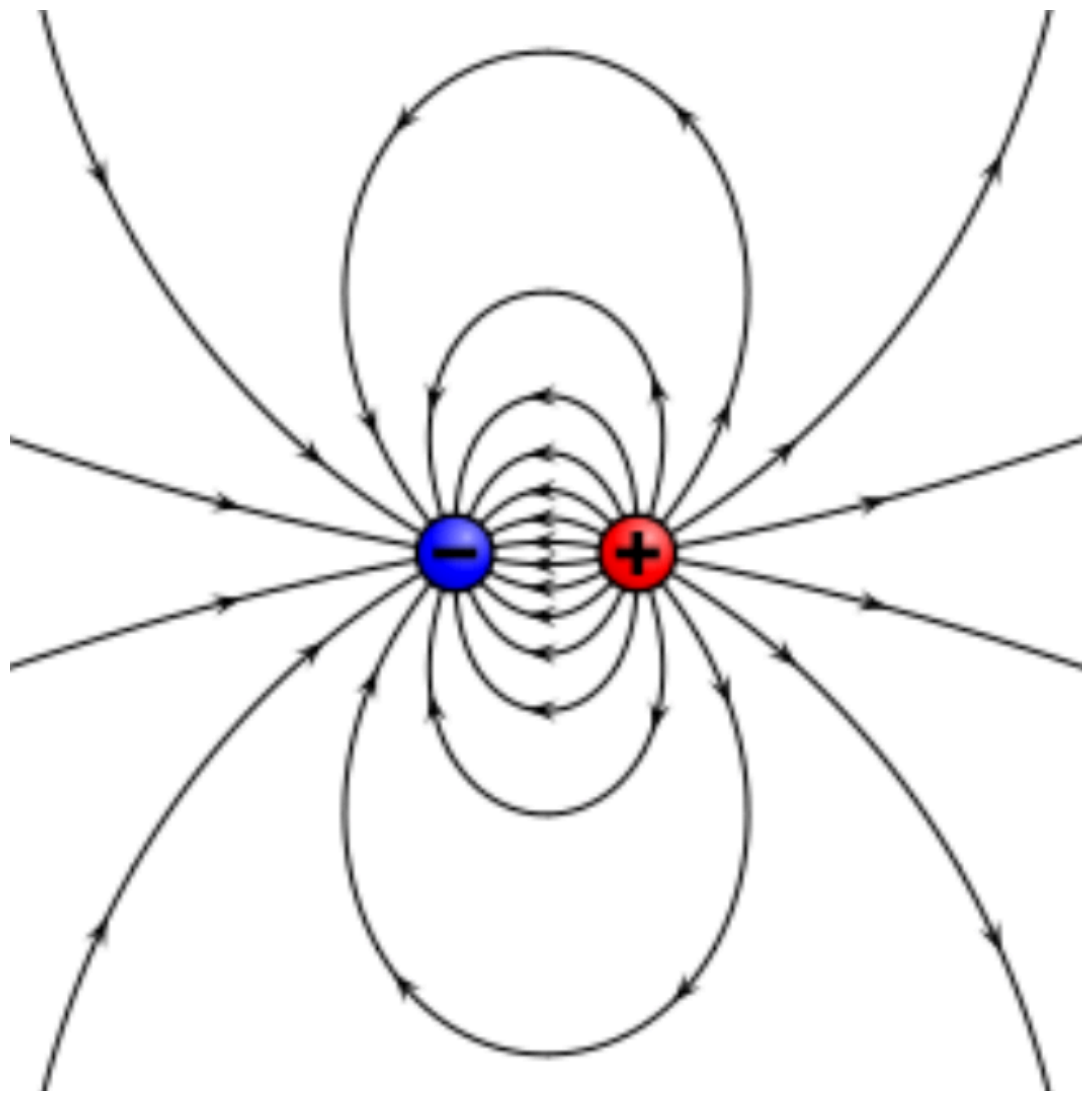
- A primeira coisa a ser entendida é o que “na matéria” quer dizer.
- Uma onda eletromagnética num vidro não viaja num meio homogêneo diferente do vácuo; entre uma molécula e outra há vácuo.
- Se este eletromagnetismo que vamos tratar é “na matéria” então o anterior era no vácuo? Se era no vácuo, não deveríamos ter $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$?
- Discussão...
-

Eletrostática na matéria

- A primeira coisa a ser entendida é o que “na matéria” quer dizer.
- Uma onda eletromagnética num vidro não viaja num meio homogêneo diferente do vácuo; entre uma molécula e outra há vácuo.
- Se este eletromagnetismo que vamos tratar é “na matéria” então o anterior era no vácuo? Se era no vácuo, não deveríamos ter $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$?
- Discussão...
- Ao dizer “na matéria” quer dizer que estamos considerando um meio cujos efeitos microscópicos de cargas positivas e negativas, ligadas entre si, são considerados de forma efetiva. Devido a parte (ou a totalidade) da carga negativa (elétrons) estar presa a estruturas positivas (átomos, por exemplo), campos elétricos e magnéticos influenciam essa distribuição sem quebrá-la. E essa distribuição gera também um campo eletromagnético.
- A matéria em questão pode ou não ter cargas ou correntes livres (possivelmente formada por uma parte dos elétrons que não está presa a certa pequena região).

Infinitos dipolos: Polarização

- O potencial de um único momento de dipolo $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ é dado por



- $$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\mathbf{p}}{\imath^2}$$

- Se o meio em questão tem muitos dipolos, um bem próximo ao outro, pode-se falar em densidade de momento de dipolo, ou polarização $\mathbf{P}$.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\imath^2}\,d\tau'. = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{1}{\imath}(\nabla'\cdot\mathbf{P})\,d\tau'$$

A eq. acima é válida a menos de um termo de superfície, que não iremos considerar. Logo,

$$\rho_b \equiv -\nabla\cdot\mathbf{P}$$

Campo de deslocamento elétrico: D

- Além da distribuição de cargas presas, denotada por ρ_b, é possível que haja cargas adicionais não presas à estrutura da matéria, denotadas por ρ_f (b e f vêm do inglês, *bound* e *free*). Assim,

$$\rho = \rho_b + \rho_f$$

- Logo,

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_f$$

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- E assim pode-se escrever a as eq's da eletrostática tendo como fonte a carga livre,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

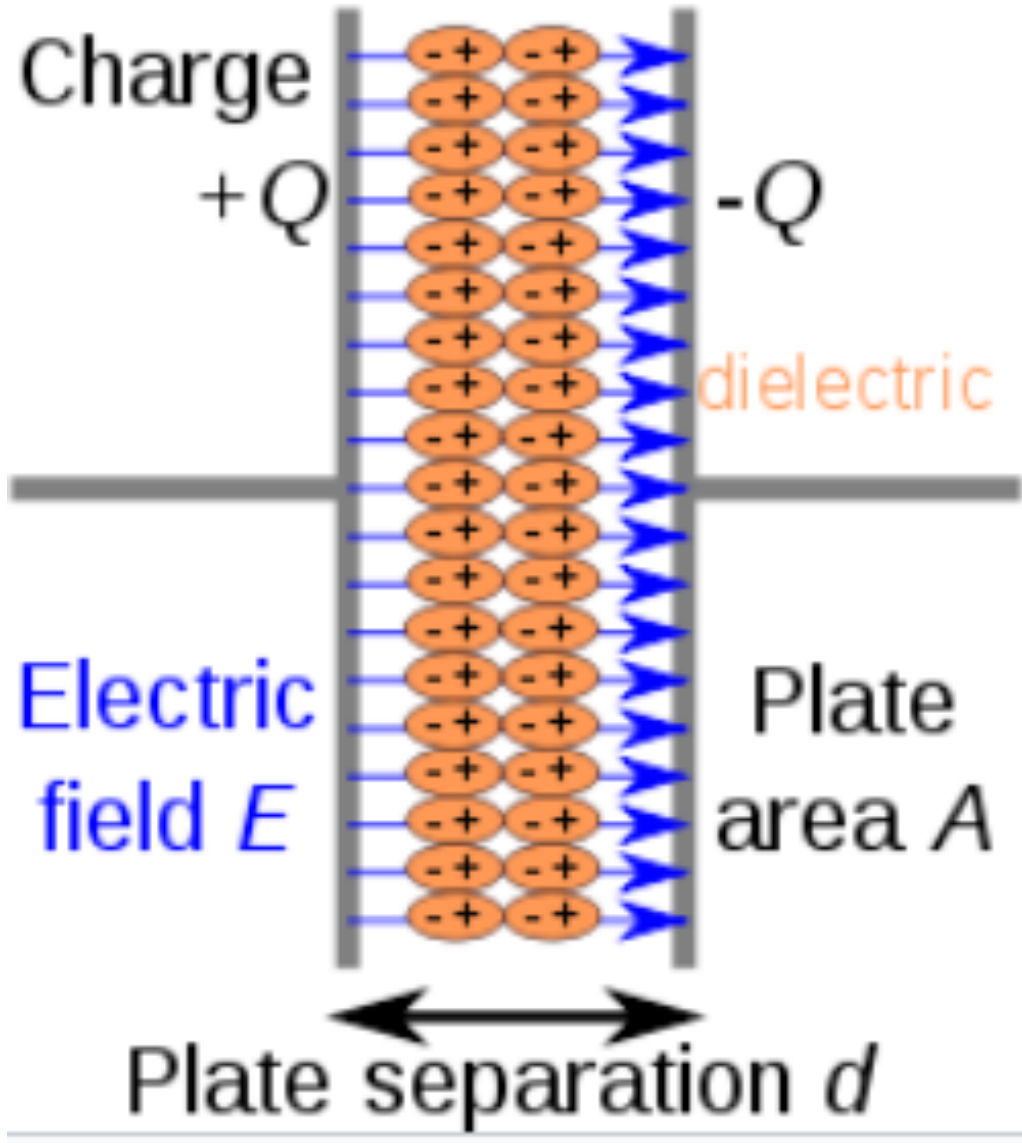
Permissividade do material: ϵ

- A permissividade do vácuo ϵ_0 é, para a eletrodinâmica, uma constante fundamental. A única forma de saber seu valor é por meio de experimentos.

- Para muitos materiais (não todos!), a polarização é proporcional ao campo elétrico local. Sendo essa constante global para o material, o material é chamado de **dielétrico linear e homogêneo.** Se a constante depende ponto a ponto do material, trata-se de um **dielétrico linear não homogêneo.** Para o case de qualquer dielétrico linear, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, em que ϵ é uma constante ou função da posição.

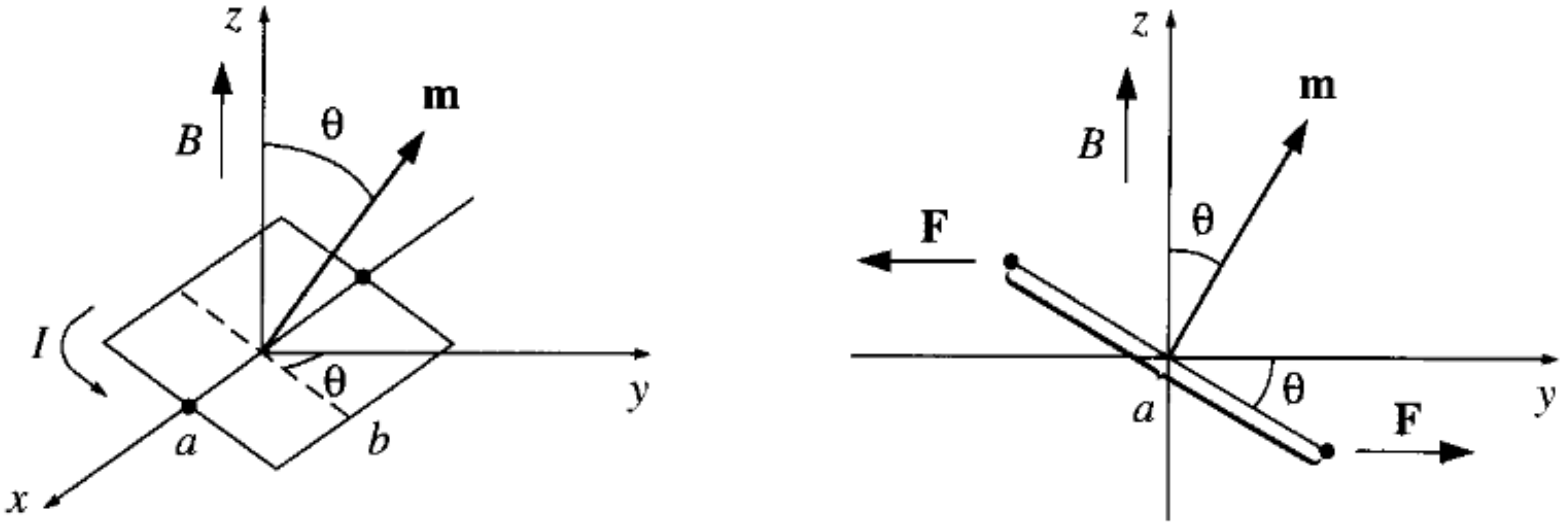
- Note que (devido a exóticos motivos históricos) as dimensões de $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ não são iguais, logo mesmo no vácuo eles são diferentes.

- De forma mais geral, ϵ pode ser uma função do próprio campo $\mathbf{E}$ e é possível que a polarização não seja paralela ao campo elétrico. Em TE I e II ênfase é dada aos meios lineares. Materiais ferroelétricos, por exemplo, não são dielétricos lineares.



Dipolo magnético

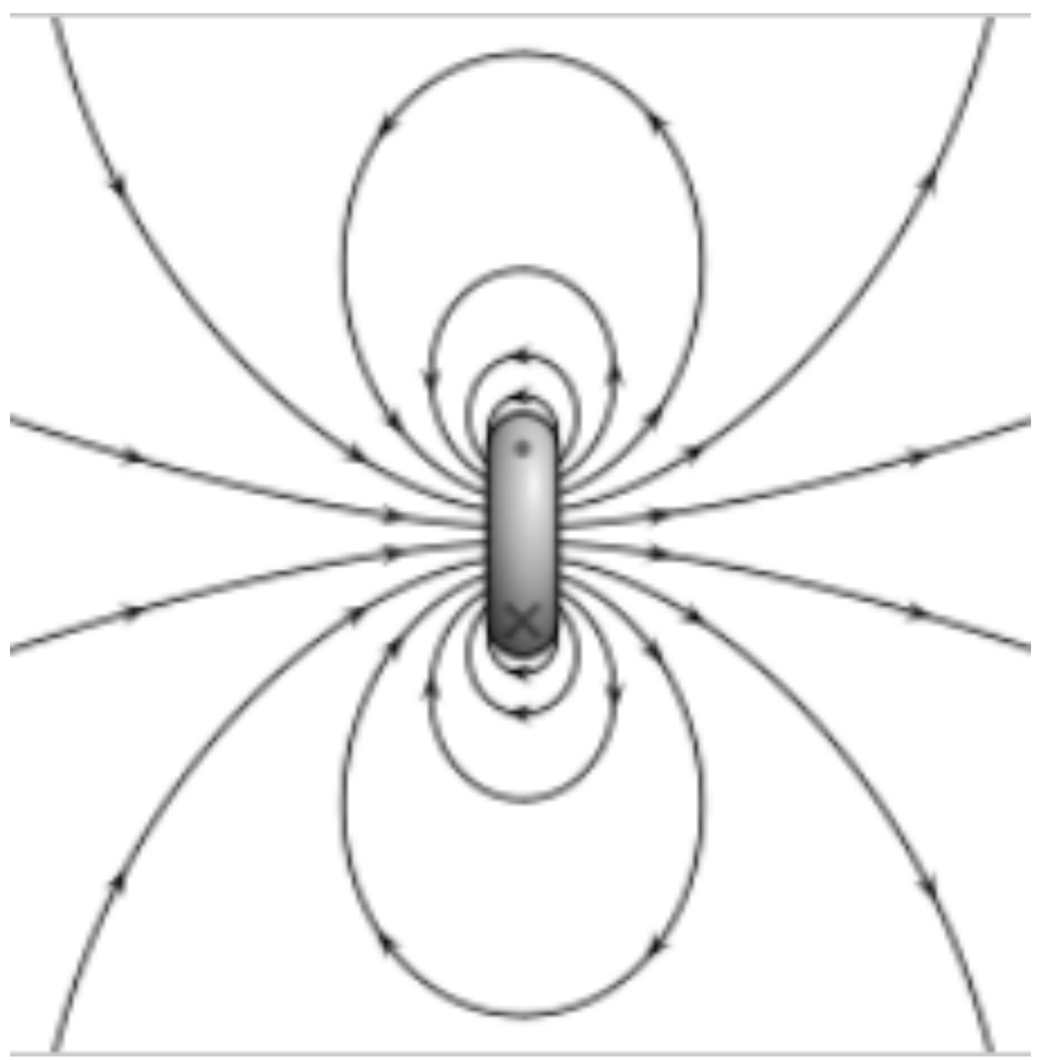
- Considere a seguinte configuração, como na figura:



$F = IbB.$

- A força resultante atuará na espira aproximando essa do caso em que o plano da espira é perpendicular a **B**.
- Para o lado 1 da espira, haverá um torque $\mathbf{N}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \frac{a}{2} F_1 \text{sen}\, \theta\, \hat{\mathbf{i}}$. Consequentemente, sendo $F = F_1 = F_2$, para a espira total vem $\mathbf{N} = a\, F\, \text{sen}\, \theta\, \hat{\mathbf{i}}$.

Infinitos dipolos magnéticos: Magnetização



- Definimos o **momento de dipolo magnético m** por

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

No exemplo anterior, $m = Iab$.

- **Exercício:** Essa definição é diferente da usada para o momento de dipolo elétrico, mas verifique que, para dipolo elétrico, $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$.
- Alguns materiais se tornam magnetizados na presença de campos magnéticos. Duas situações comuns são paramagnetismo e diamagnetismo (respectivamente, criam dipolos magnéticos microscópicos alinhados, ou anti-alinhados, com o campo magnético local). O livro apresenta (grosseiras) aproximações semi-clássicas para tais fenômenos.
- **Exercício:** revise esses modelos (um está associado com momento de dipolo orbital de elétrons, outro com o spin dos mesmos).
- Um material com dipolos magnéticos microscópicos possui uma **magnetização M**, que é uma densidade de momento de dipolo magnético.

O campo de um objeto magnetizado

- Lembrando que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, encontra-se que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}$$

- **Exercício:** Deduza a expressão acima. Em que calibre encontra-se essa expressão para **A**?
- Se o objeto em questão está magnetizado, então, pelo princípio de superposição,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{\imath} [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] \, d\tau'$$

a menos de um termo de superfície, que foi desprezado (tal qual no caso elétrico).

- Da expressão do potencial vetor **A** para uma densidade de corrente arbitrária, encontramos

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$$

O campo H

- Em materiais, é conveniente introduzir o campo

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$$

- Consequentemente as equações da magnetostática podem ser expressas por

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Semelhantemente à eletrostática, para materiais lineares em que a magnetização seja proporcional ao campo **B**, como os paramagnéticos ou diamagnéticos, é conveniente usar

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$$

- Lembrar que $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$.

Equações da eletrostática e magnetostática na matéria

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

- Equações que definem o meio, "a matéria": $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$.

Equações da eletrostática e magnetostática na matéria

Dependem do meio e contém as fontes.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\text{e} \\ &\text{e} \end{aligned} \quad \boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \end{aligned}}$$

Não mudam com o meio.

- Equações que definem o meio, "a matéria": $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$.