Teoria Eletromagnética II

Parte 2 -Leis de Conservação e Ondas Eletromagnéticas (capítulos 8 & 9)

Prof. Davi C. Rodrigues
Período 2020/2 (EARTE)
Fevereiro-março/2021

Comentários gerais

- De agora em diante é tudo aplicação.
- As leis fundamentais do eletromagnetismo foram estabelecidas na seção anterior.

Conservação local: equação da continuidade

- Equação da continuidade não é novidade para vocês, mas como ela será essencial para esta seção, vamos fazer (mais uma) uma breve revisão.
- Relembrando: o que é essa equação formalmente? O que ela significa?

Teorema de Poynting

- O trabalho realizado por campos eletromagnéticos, sobre uma carga q que sofre um deslocamento $d\mathbf{l} = \mathbf{v}\, dt$,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}\, dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\, dt.$$

- A expressão acima é para uma carga pontual. Não falamos antes neste curso de TE II, mas a força de Lorentz tem também uma versão contínua. Dado que a dependência na carga é linear, é fácil obter a versão contínua (novamente, temos aqui um princípio de superposição). Assim...

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

- Acima, $\mathbf{f}$ é uma densidade de força, (i.e., $\mathbf{F} = \int \mathbf{f}\, d\tau$). Usando $\rho = q\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, para descrever uma carga pontual em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, retorna-se à expressão de partícula da força de Lorentz. Deve-se notar também que, na expressão para $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}$ é um campo vetorial. Assim, $dw = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dt\, d\tau$ e logo

$$\frac{dW}{dt} = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, d\tau$$

Teorema de Poynting

- Usando a lei de Ampère (a versão corrigida, como sempre assumiremos), a lei de Faraday e identidades vetoriais, chega-se na equação chave do teorema de Poynting:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)d\tau - \frac{1}{\mu_0}\oint(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{a}$$

- **Exercício:** Faça as passagens necessárias para obter a expressão acima. Tente fazer sem ver o livro, mas prestando atenção nas dicas acima do que foi usado.
- Sendo possível ignorar o termo de superfície, note que obtivemos uma nova derivação da energia contida nos campos eletromagnéticos. Importante: a energia não é linear nos campos!
- Para simplificar o entendimento da eq. acima, podemos primeiro considerar o caso em que não há partículas carregadas, logo não há trabalho mecânico, assim podemos escrever

$$0 = \dot{U}_{\text{em}} + \oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a},$$

com U_{em} a energia dos campos e $\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$, que é chamado de vetor de Poynting.

Teorema de Poynting

- Podemos ainda escrever, usando u_{em} como densidade de energia eletromagnética,

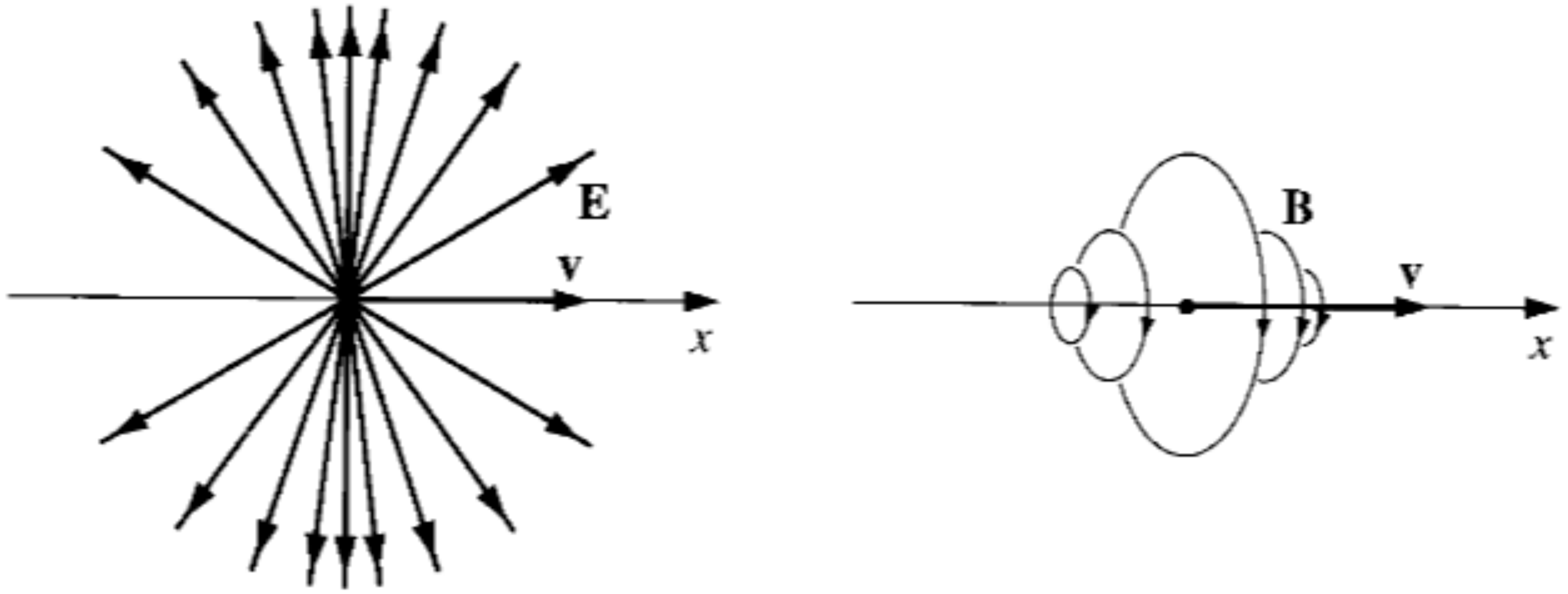
$$\dot{u}_{\text{em}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0.$$

- Ou seja, é uma equação de continuidade para a energia eletromagnética e cuja corrente é o vetor de Poynting: $\mathbf{J}_{\text{em}} = \mathbf{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.
- Voltemos agora ao caso em que há trabalho mecânico. Só um detalhe muda na equação acima, ao invés de usarmos u_{em}, basta usar $u_{\text{total}} = u_{\text{em}} + u_{\text{mec}}$, ou seja,

$$\dot{u}_{\text{total}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0.$$

- Assim o teorema de Poynting estabelece uma relação entre trabalho mecânico e energia eletromagnética.
- É bom lembrar que, por construção, as partículas estão dentro do volume considerado, não saem desse volume. Contudo, isso não garante que a energia eletromagnética esteja confinada no mesmo volume, ela pode sair.

Terceira lei de Newton na eletrodinâmica



$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

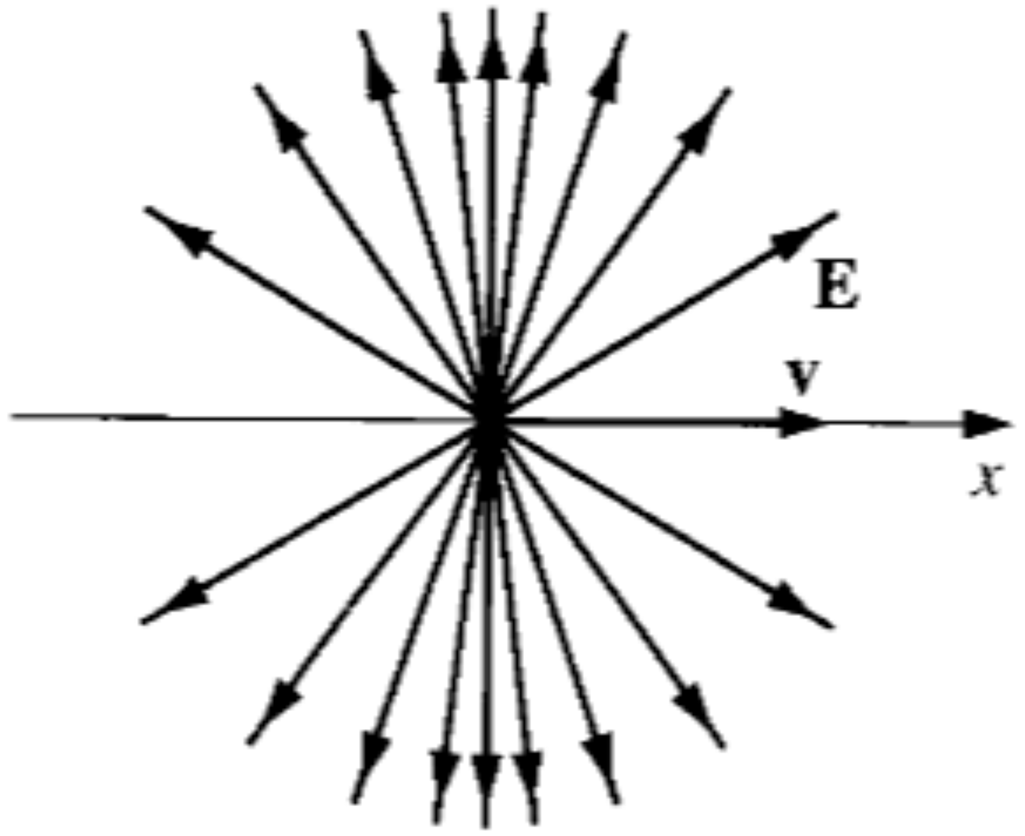
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

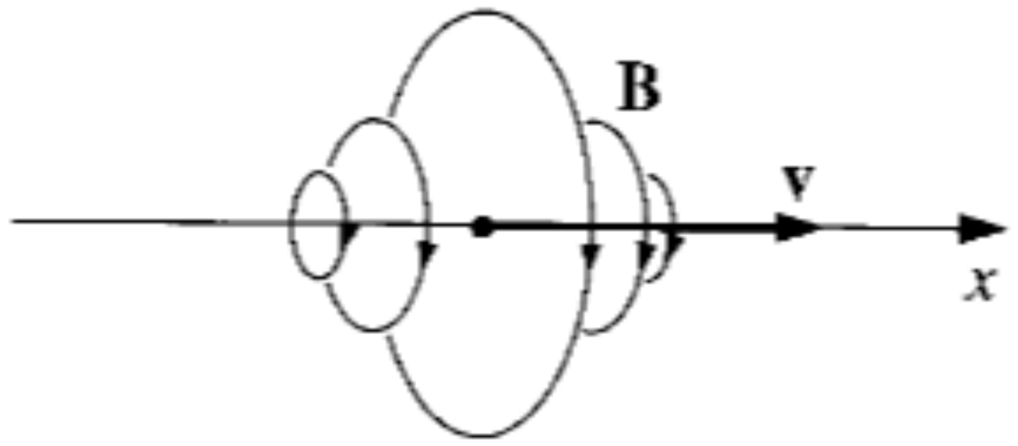
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

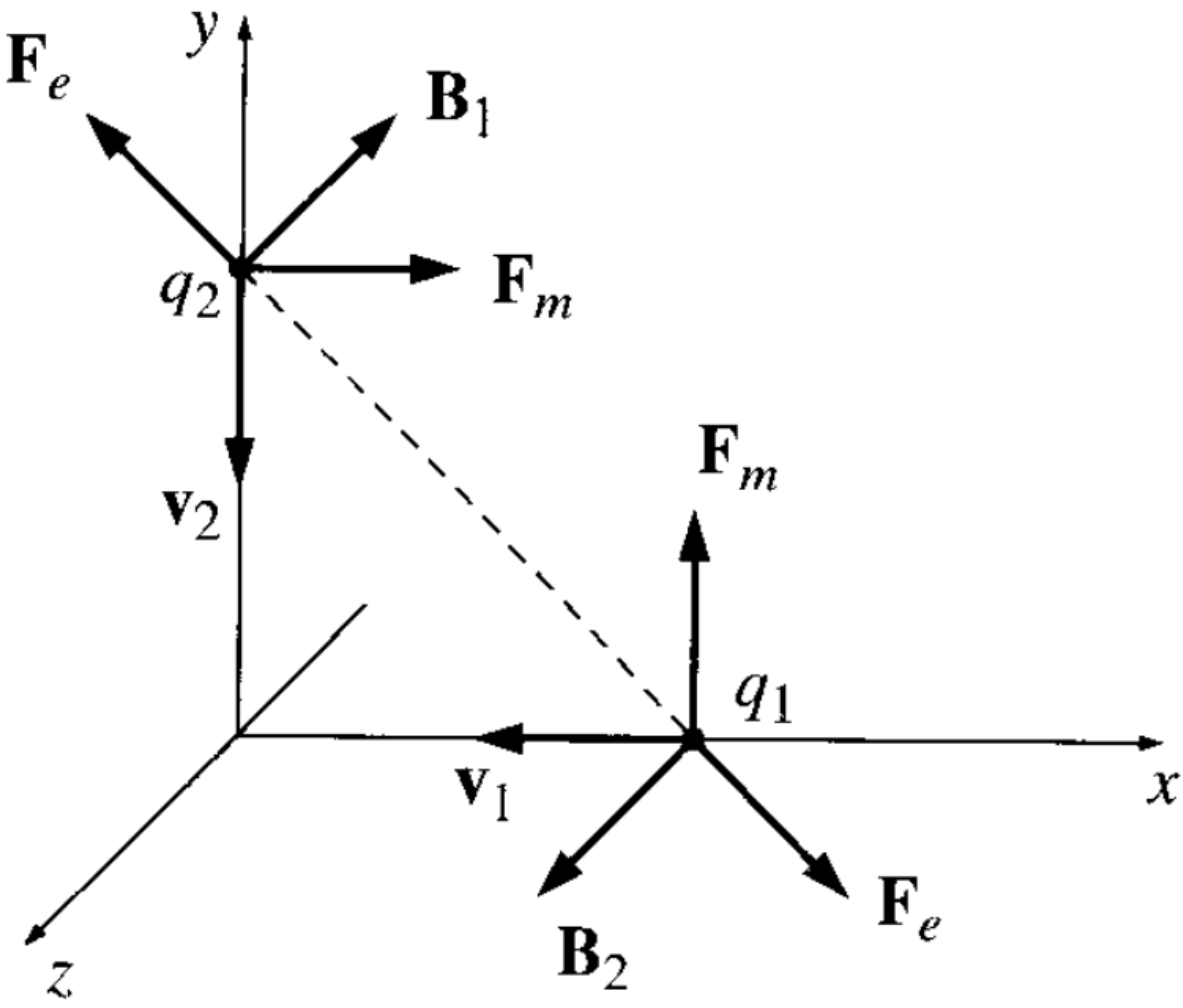
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Acima, campos **E** e **B** devido a uma partícula carregada se movendo com a velocidade **v** acima indicada.
- A dedução em detalhes desses campos só veremos no Cap. 10. Mas só precisamos de um entendimento qualitativo aqui.

Terceira lei de Newton na eletrodinâmica

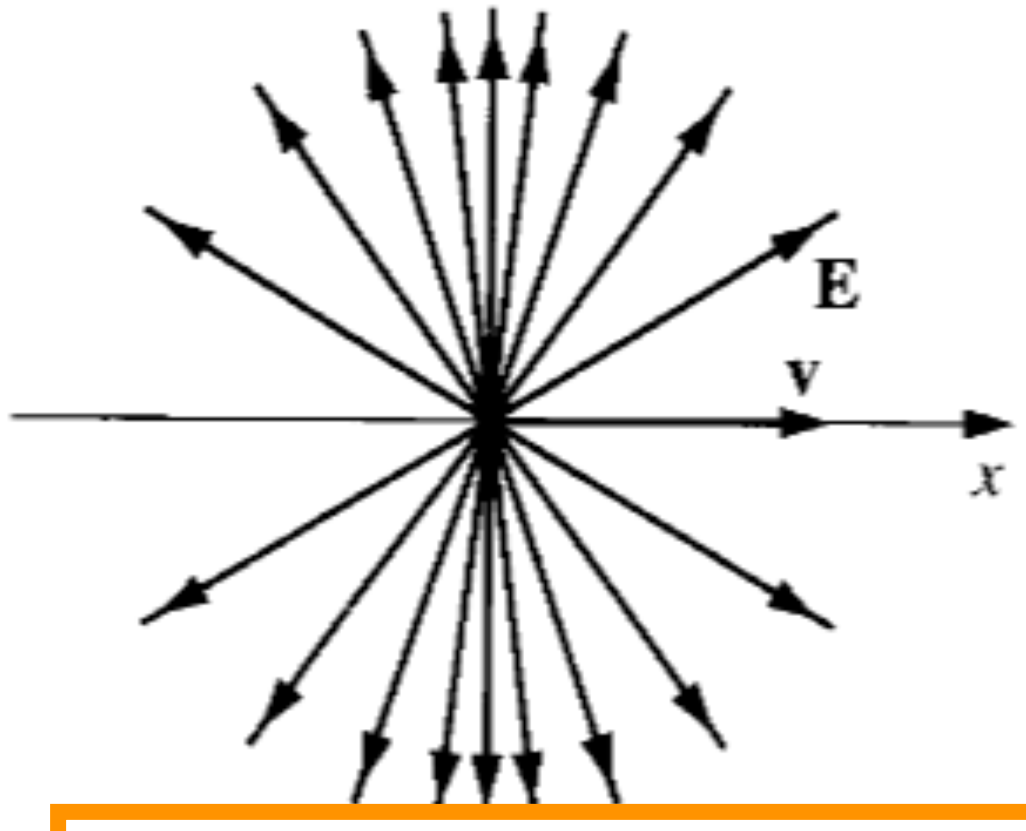


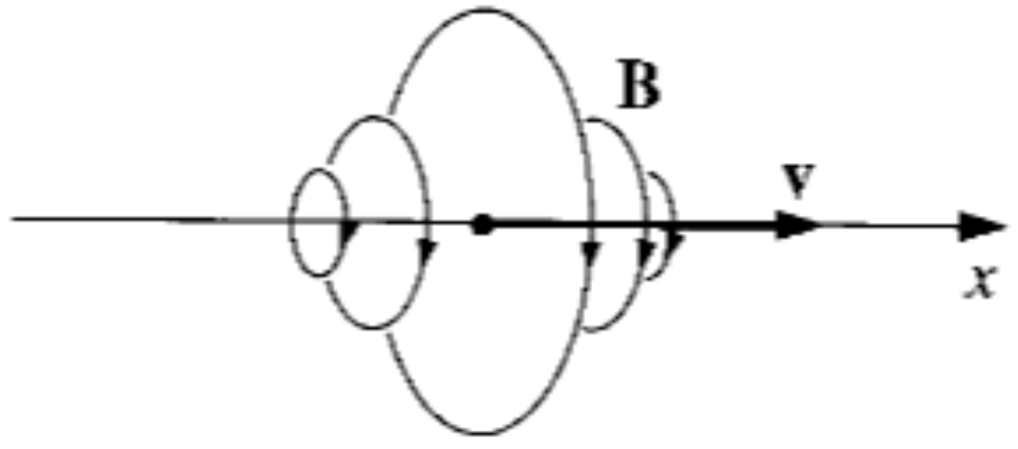


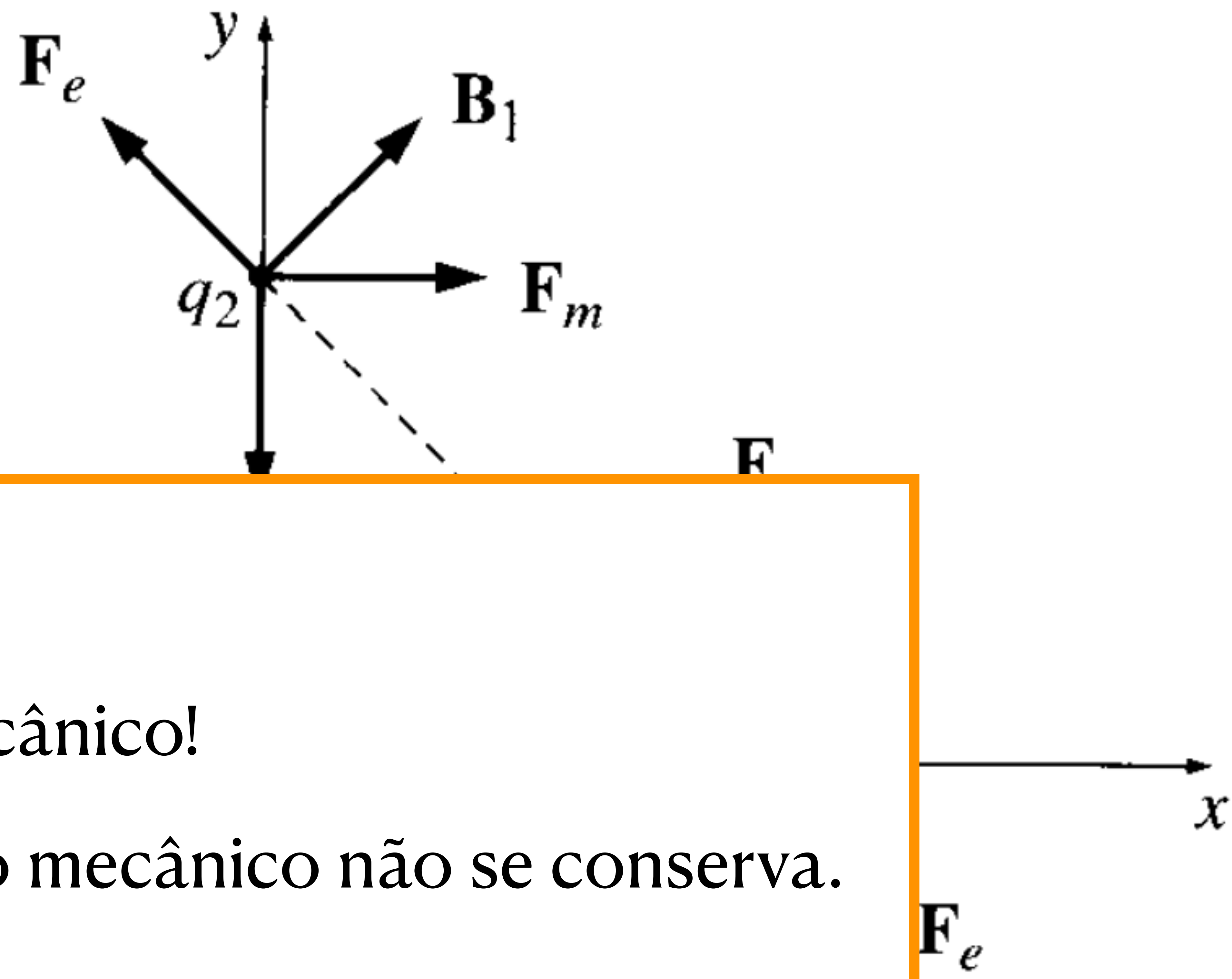


- Acima, campos **E** e **B** devido a uma partícula carregada se movendo com a velocidade **v** acima indicada.
- A dedução em detalhes desses campos só veremos no Cap. 10. Mas só precisamos de um entendimento qualitativo aqui.
- O gráfico a direita deve ser entendido para distâncias pequenas entre as partículas, do contrario deveria ser considerado o tempo de propagação dos campos, como veremos.

Terceira lei de Newton na eletrodinâmica







A terceira lei da mecânica parece ser violada!
Para dada força, não há uma força igual e oposta.
Consequentemente, não há conservação do momento mecânico!

A resposta final, como veremos, é essa mesma: o momento mecânico não se conserva.

Veremos que o **momento total, devido às partículas e aos campos, esse se conserva.**

- Aci
  se
- A c
  Ca
  litativo aqui.
- O gráfico a direita deve ser entendido para distâncias pequenas entre as partículas, do contrario deveria ser considerado o tempo de propagação dos campos, como veremos.

Equação da continuidade para vetores: prólogo

- Trataremos em breve da conservação de momento. Tal como no caso de energia, essa conservação é válida localmente, logo deve haver uma eq. da continuidade.

- Para uma densidade escalar ρ e uma corrente associada $\mathbf{J}$, temos

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

- ou, equivalentemente, em componentes,

$$\dot{\rho} + \sum_i \partial_i J_i = 0.$$

- Mas e se a grandeza conservada for vetorial? A corrente associada precisa depender de duas direções: uma é referente à direção do fluxo da grandeza conservada (tal como $\mathbf{J}$), e outra é a direção local da grandeza em si. Algo com duas direções não pode ser um vetor, mas pode ser um tensor. Embora a teoria geral de tensores provavelmente vocês não conheçam, esses objetos não são completa novidade para vocês. Por exemplo, o tensor de inércia.

Uma breve digressão sobre tensores

- Um vetor é um objeto geométrico que não depende do sistema de coordenadas e pode ser denotado por

$$\mathbf{J} = \sum_i J_i \hat{\mathbf{e}}_i.$$

- $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1,2,3}$ é base ortonormal do espaço. No espaço cartesiano 3D é comum usar $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{k}}$.

- O que não depende do sistema de coordenadas é $\mathbf{J}$, as componentes J_i dependem da escolha da base.

- Um tensor (de rank 2) é também um objeto geométrico que não depende do sistema de coordenas, contudo a base desse objeto não pode ser expressa pelas 3 elementos da base $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$, é dada pelas 9 componentes da base $\{\hat{\mathbf{e}}_{ij} \equiv \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j\}_{i,j=1,2,3}$. Assim, um tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ é dado por

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \sum_{i,j} T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_{ij} \,.$$

Uma breve digressão sobre tensores

- Um vetor é um objeto geométrico que não depende do sistema de coordenadas e pode ser denotado por

$$\mathbf{J} = \sum_i J_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

- $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1,2,3}$ é [illegible] do espaço. No espaço cartesiano 3D é comum usar $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{k}}$.
- O que não depende do sistema de coordenadas é $\mathbf{J}$, as componentes J_i dependem da escolha da base.
- Um tensor (de rank 2) é também um objeto geométrico que não depende do sistema de coordenas, contudo a base desse objeto não pode ser expressa pelas 3 elementos da base $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$, é dada pelas 9 componentes da base $\{\hat{\mathbf{e}}_{ij} \equiv \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j\}_{i,j=1,2,3}$. Assim, um tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ é dado por

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \sum_{i,j} T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_{ij}\,.$$

O livro usa o símbolo $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ para denotar tensor de rank 2.

Esse não é um símbolo raro, mas tampouco é padrão.

Eu não uso esse símbolo. Só vou usá-lo no que segue pois acho que fica mais claro neste contexto específico que o livro aborda.

Boa parte da notação vetorial pode ser usada para tensores de rank 2, basta tomar alguns cuidados.

Notação vetorial e tensores de *rank* 2

- A notação aqui apresentada só funciona para tensores até *rank* 2.
- No que segue, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são vetores e $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ é tensor de rank 2.

$$\mathbf{A} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \sum_i A_i \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \sum_{j,k} T_{kj} \hat{\mathbf{e}}_{jk} = \sum_{i,j,k} A_i T_{jk} \delta_{ij} \hat{\mathbf{e}}_k = \sum_{i,k} A_i T_{ik} \hat{\mathbf{e}}_k.$$

- Lembrando que $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$, acima usamos a seguinte convenção: $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_{jk} = \delta_{ij}\, \hat{\mathbf{e}}_k$. Ou seja, o **produto escalar de um vetor por um tensor de rank 2 é um vetor** (não um escalar).
- Não usamos acima, mas com esta notação é natural introduzir o produto escalar à direita de um tensor da seguinte forma: $\hat{\mathbf{e}}_{jk} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \delta_{ki}\, \hat{\mathbf{e}}_j$. Logo, $\mathbf{A} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \neq \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}$.
- É bom saber compreender tensores como objetos geométricos, mas na prática a grande maioria das contas com tensores é feita em componentes, não usando a notação vetorial acima. Até rank 2 essa notação funciona razoavelmente, mas para rank superior não faz sentido.
- Analogamente, o divergente de um tensor de rank 2 é um vetor: $\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \mathbf{B}$.

Equação da continuidade para vetores

- Agora que temos uma melhor ideia do que é um tensor.
- Seja $\boldsymbol{\sigma}$ um campo vetorial que é a densidade de certa grandeza vetorial dada por $\mathbf{Q}_\sigma \equiv \int \boldsymbol{\sigma}\, d\tau$. — Note que $\boldsymbol{\sigma}$ e $\mathbf{Q}_\sigma$ são análogos à densidade de energia u e à energia $U = \int u\, d\tau$.
- Qualquer que seja a corrente associada a $\boldsymbol{\sigma}$, ela precisa ser um tensor (de rank 2), seja ela denotada por $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$. Logo:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \mathbf{0}.$$

- Lembrar que o divergente de $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ é um vetor. Integrando, temos (via teorema de Gauss)

$$\dot{\mathbf{Q}} + \int \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Densidade de força e o tensor de Maxwell

- Com o que acabamos de ver, já sabemos em que equação temos de chegar caso o momento seja conservado. Comecemos da seguinte equação, que já vimos:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

- Usando as equações de Maxwell, podemos eliminar ρ e $\mathbf{J}$, ou seja,

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{B}$$

- Usando algumas identidades vetoriais, encontramos que (**Exercício:** demonstre essas passagens)

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

- em que

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right)$$

- Fazer o **exemplo 8.2.**

Densidade de força e o tensor de Maxwell

- Com o que acabamos de ver, já sabemos em que equação temos de chegar caso o momento seja conservado. Comecemos da seguinte equação, que já vimos:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

- Usando as equações de Maxwell, podemos eliminar ρ e **J**, ou seja,

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{B}$$

- Usando algumas identidades vetoriais, encontramos que (**Exercício:** demonstre essas passagens)

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

- em que

Tensor de Maxwell
(ou tensor das tensões de Maxwell)

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right)$$

- Fazer o **exemplo 8.2.**

Densidade de momento eletromagnético

- O ponto chave do slide anterior é a seguinte expressão que vamos tentar entender agora:

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

- A densidade de força se relaciona coma densidade de momento mecânico da seguinte forma:

$$\mathbf{f} = \dot{\boldsymbol{\wp}}_{\text{mec}}$$

- Num sistema de alguma forma isolado o termo com o divergente não pode ser relevante (por construção, o sistema é isolado, logo nada cruza sua superfície), logo

$$\frac{d}{dt} \int (\boldsymbol{\wp}_{\text{mec}} + \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S})\, d\tau = 0.$$

- Portanto identificados $\boldsymbol{\wp}_{\text{em}} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$.
- <u>O vetor de Poynting possui dois papeis</u>: é a densidade de momento eletromagnético (a menos da constante $\epsilon_0 \mu_0$) e é a corrente da energia eletromagnética $\boldsymbol{\wp}_{\text{em}} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$ e $\mathbf{J}_{\text{em}} = \mathbf{S}$.

Densidade de momento eletromagnético

- Agora deve ser claro que a equação abaixo é a equação da continuidade para o momento.

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

- E portanto o (negativo do) tensor de Maxwell é a corrente do momento eletromagnético.
- Em conclusão, momento é conservado no eletromagnetismo, mas é necessário considerar o momento das partículas e dos campos.
- É imediato notar que, mesmo num sistema isolado, $\frac{d}{dt}\int \wp_{\text{mec}}\, d\tau = \dot{\mathbf{p}}_{\text{mec}} \neq \mathbf{0}$.
- Num sistema isolado e sem matéria carregada, temos $\frac{d}{dt}\int \mathbf{S}\, d\tau = \mathbf{0}$.
- Em geral, na ausência de matéria carregada, não há força exercida, logo

$$\epsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{S}} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \mathbf{0}.$$

Densidade de momento eletromagnético

- Agora deve ser claro que a equação abaixo é a equação da continuidade para o momento.

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

- E portanto o (negativo do) tensor de Maxwell é a corrente do momento eletromagnético.
- Em conclusão, momento é conservado no eletromagnetismo, mas é necessário considerar o momento das partículas e dos campos.

Exercício: 8.5

- É imediato notar que, mesmo num sistema isolado, $\frac{d}{dt}\int \wp_{\text{mec}}\, d\tau = \dot{\mathbf{p}}_{\text{mec}} \neq \mathbf{0}$.
- Num sistema isolado e sem matéria carregada, temos $\frac{d}{dt}\int \mathbf{S}\, d\tau = \mathbf{0}$.
- Em geral, na ausência de matéria carregada, não há força exercida, logo

$$\epsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{S}} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \mathbf{0}.$$

Densidade de momento angular eletromagnético

- A densidade de momento angular é dada por

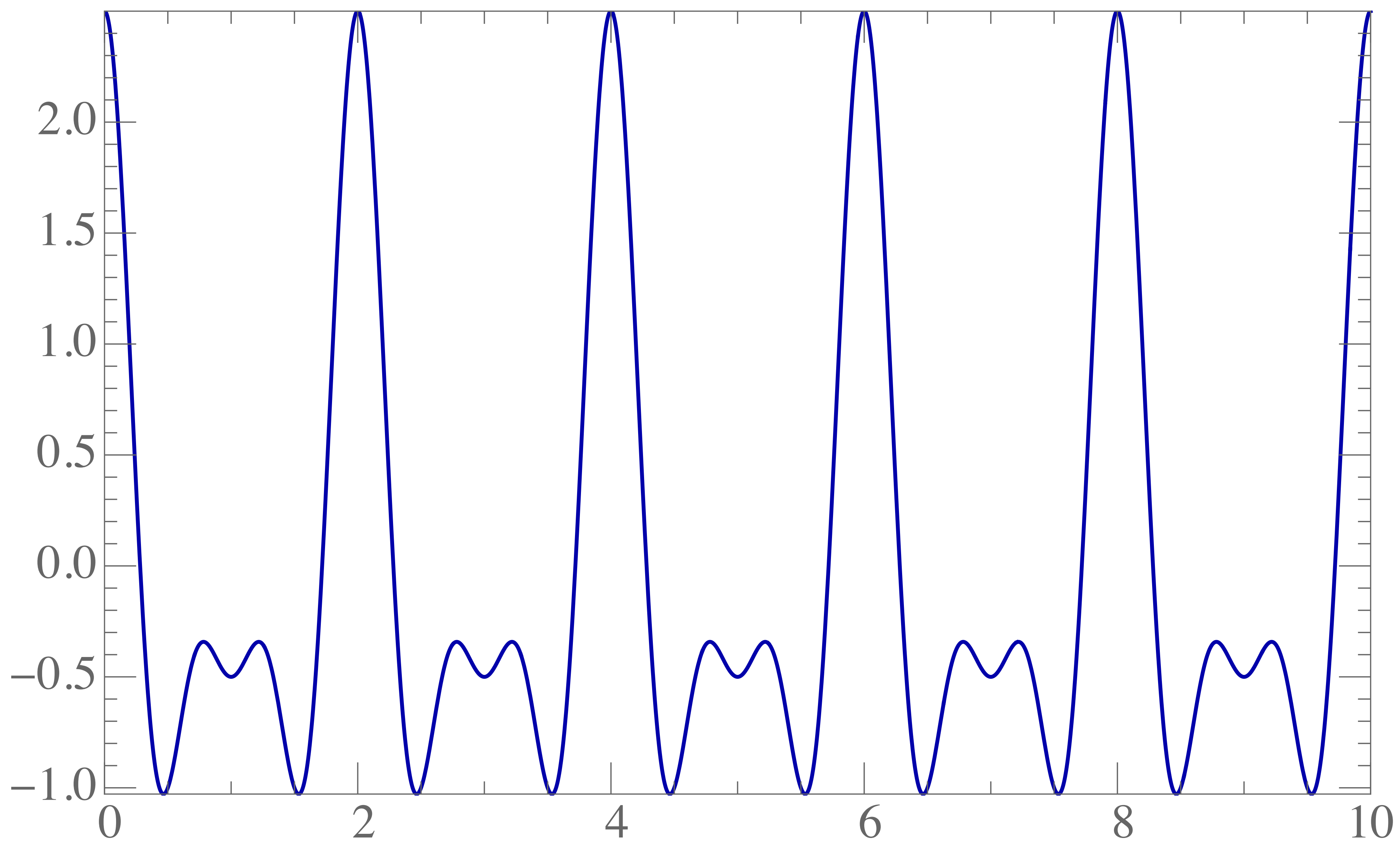
$$\boldsymbol{\ell}_{\text{em}} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\wp}_{\text{em}} = \epsilon_0 \left[\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\right]$$

- **Exercício (pequeno) desafio:** encontre a corrente associada à conservação do momento angular. Dica: ver Zangwill. — Vale 0.3 pontos a mais na segunda prova.
- **Exercício (pequeno) desafio**: Encontre, apresente e eplique ao menos um experimento sobre conservação de momento angular no eletromagnetismo. — Vale 0.3 pontos a mais na segunda prova.
- **Exercícios:** 8.2, 8.11 (somente a e b) e 8.15.

Ondas Eletromagnéticas

Ondas unidimensionais: em repouso

- Esta seção, que está no livro também, é uma (longa) revisão de conceitos básicos de ondas.
- Vamos aqui revisar alguns pontos centrais da revisão do livro.
- **O que é uma onda?**
- É uma perturbação periódica. Comumente, ondas se referem a perturbações periódicas que se se propagam no tempo e no espaço. Como as ondas no mar.
- Se é uma perturbação periódica, ela deve poder ser descrita por uma função periódica.
- Uma função periódica é definida por $f(x+L) = f(x)$, em que L é o período da função.
- No exemplo ao lado, $L = 2$. A função é $f(x) = \cos(2\pi x) + \cos(\pi x) + 0.5\cos(3\pi x)$
- **Exercício:** Verifique que $f(x+2) = f(x)$.



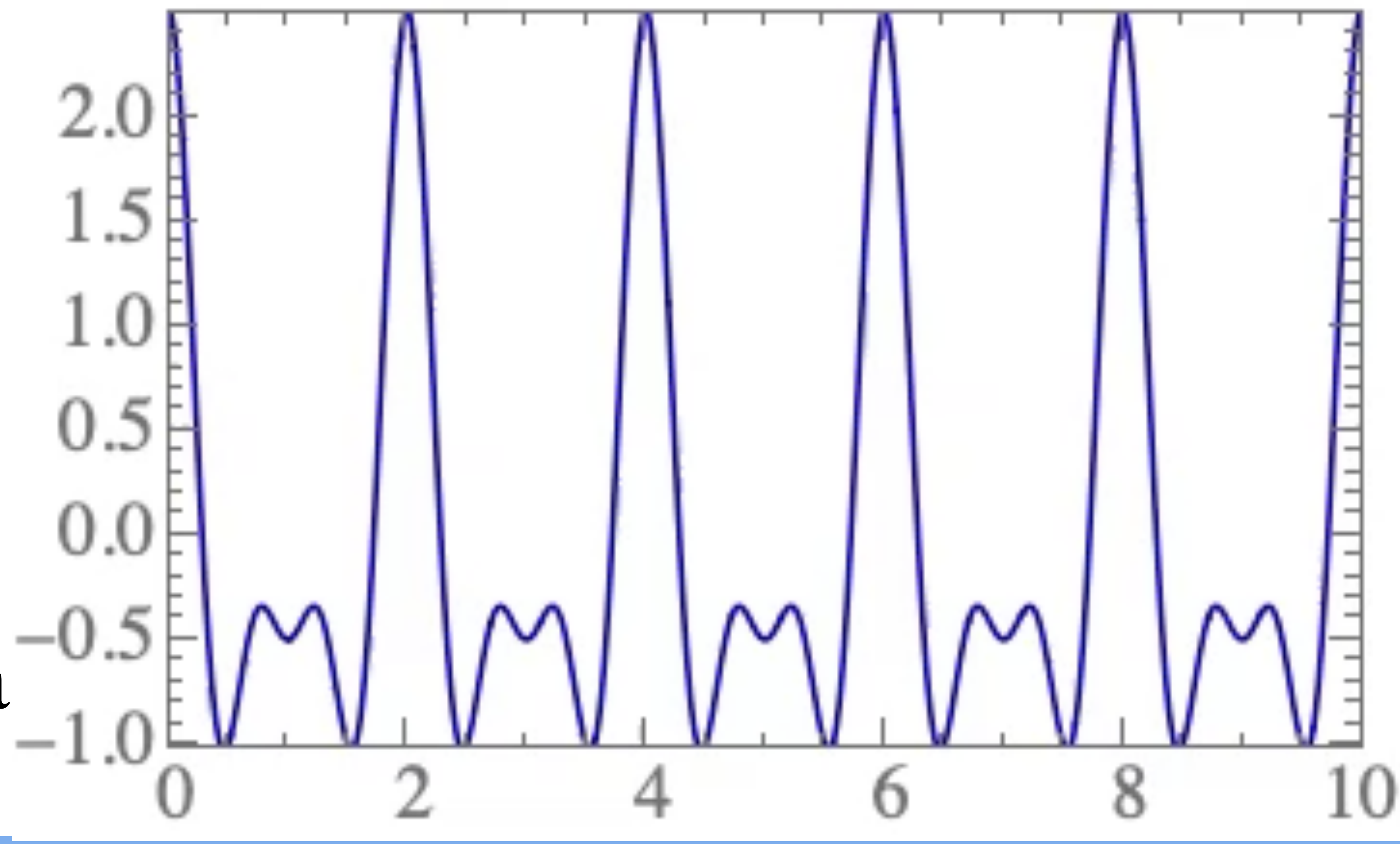
Ondas unidimensionais: em movimento

- Façamos agora uma mudança de referencial: se nos movermos para a esqueda com velocidade constante v, veremos essas ondas se movendo para a direita.

- No novo referencial, a coordenda x', em repouso com o observador, se relaciona à coordenada em repouco com as ondas da seguinte forma: $x' = x + vt$. Consequentemente, $x = x' - vt$ e $f(x) = f(x' - vt)$.

- Analogamente, se o observador está parado e são as ondas que se movem para a direita, a função que descreve essas ondas em movimento seria $f(x - vt)$.

- Ou sejam, em geral, ondas em movimento são funções periódicas que dependem do tempo e do espaço. Contudo, funções do tipo $f(x, t)$ são gerais demais, a combinação de espaço e de tempo só ocorre na forma $f(x \pm vt)$, o sinal interno depende se a onda se propaga para a esq. ou direita



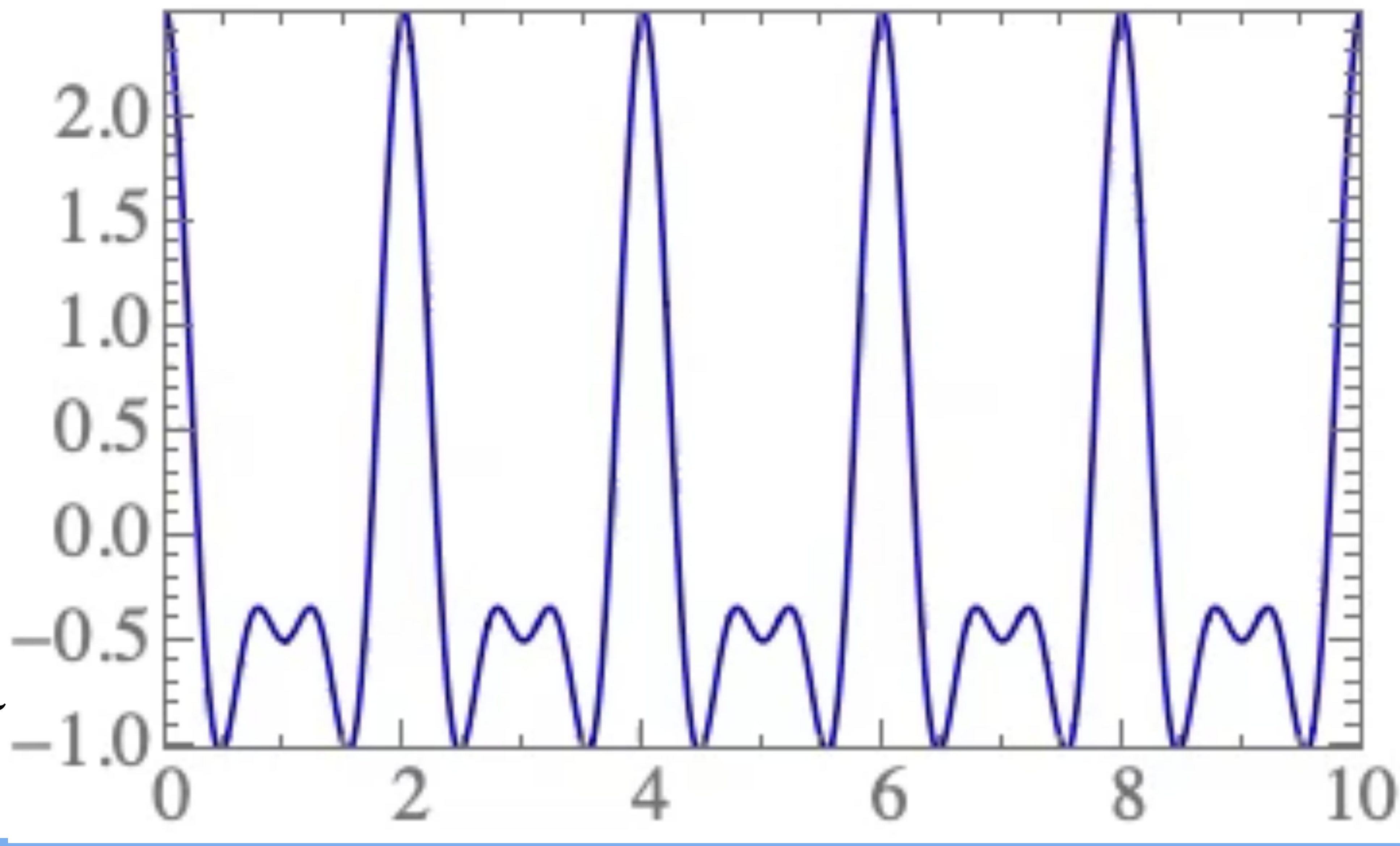
Ondas unidimensionais: em movimento

- Façamos agora uma mudança de referencial: se nos movermos para a esqueda com velocidade constante v, veremos essas ondas se movendo para a direita.

- No novo referencial, a coordenda x', em repouso com o observador, se relaciona à coordenada em repouco com as ondas da seguinte forma: $x' = x + vt$. Consequentemente, $x = x' - vt$ e $f(x) = f(x' - vt)$.

- Analogamente, se o observador está parado e são as ondas que se movem para a direita, a função que descreve essas ondas em movimento seria $f(x - vt)$.

- Ou sejam, em geral, ondas em movimento são funções periódicas que dependem do tempo e do espaço. Contudo, funções do tipo $f(x, t)$ são gerais demais, a combinação de espaço e de tempo só ocorre na forma $f(x \pm vt)$, o sinal interno depende se a onda se propaga para a esq. ou direita



Ondas unidimensionais: equação diferencial

- Como descrever uma onda a partir de uma equação diferencial?
- Simples: precisamos da equação diferencial cuja solução geral tenha a forma $f(x \pm vt)$.

Ondas unidimensionais: equação diferencial

- Como descrever uma onda a partir de uma equação diferencial?
- Simples: precisamos da equação diferencial cuja solução geral tenha a forma $f(x \pm vt)$.
- Seja $h \equiv x - vt$, logo

$$\partial_x f(h) = f'(h) \ \text{ e } \ \partial_t f(h) = f'(h)(\pm v),$$

$$\partial_x^2 f(h) = f''(h) \ \text{ e } \ \partial_t^2 f(h) = f''(h) v^2.$$

- Consequentemente,

$$\partial_x^2 f - \frac{1}{v^2}\partial_t^2 f = 0.$$

- **Exercício:** Escreva uma equação diferencial que descreva ondas que se propagam necessariamente no sentido positivo do eixo x, sem admitir ondas no sentido oposto.
- **Exercício:** Considere a eq. diferencial $\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\ddot{f} = 0$. Verifique que $f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \pm \omega t)$ é solução para qualquer $\mathbf{k}$, desde que $\omega = kv$.

Ondas sinusoidais e notação complexa

- Uma onda sinusoidal unidimensional é uma onda que pode ser escrita na forma $f(z,t) = A\cos[kx - \omega t + \delta]$.

- k é o número de onda (sendo equivalente a $k = 2\pi/\lambda$),
  ω é a frequência angular (que satisfaz $\omega = kv$),
  A é a amplitude e δ é a fase.

- Uma onda sinusoidal pode sempre ser escrita da seguinte forma,

$$f(z,t) = \mathrm{Re}[Ae^{i(kz-\omega t+\delta)}] = \mathrm{Re}[\tilde{A}e^{i(kz-\omega t)}].$$

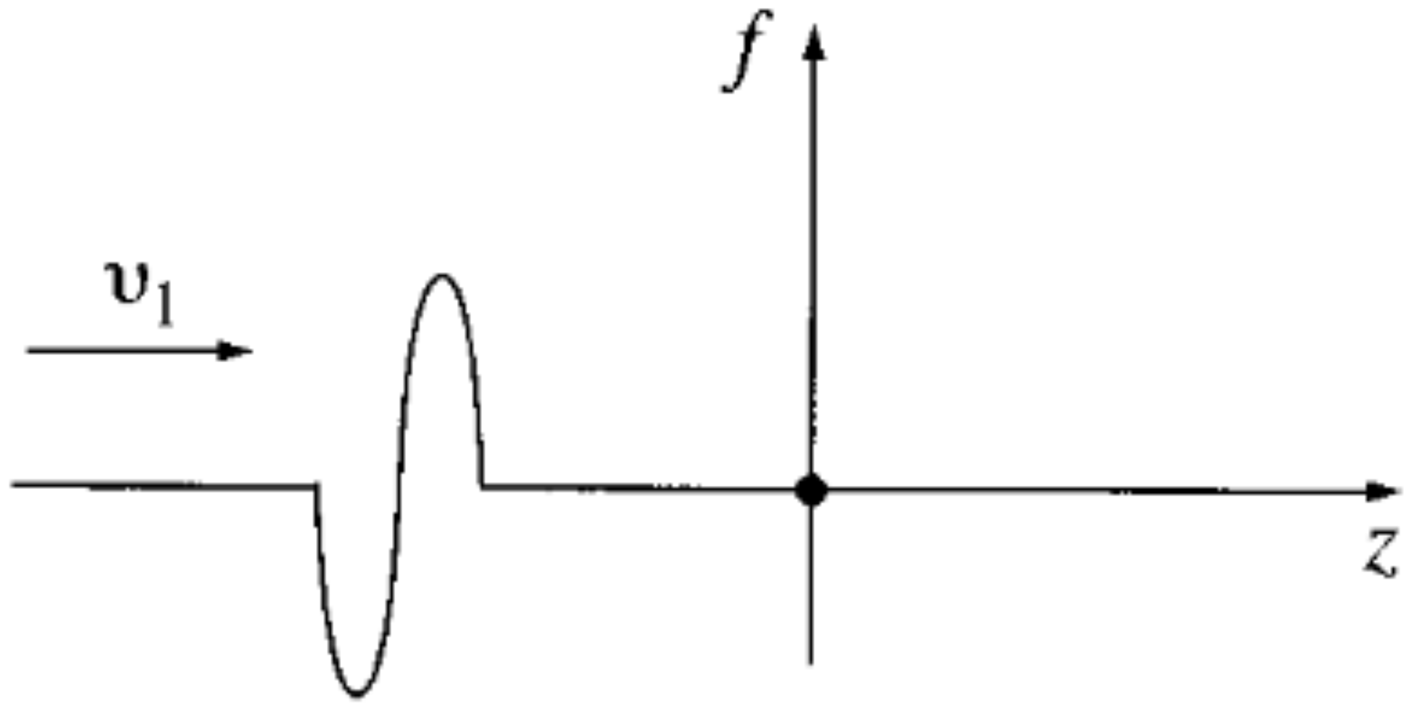
- Muitas vezes precisaremos somar ondas com o mesmo k e o mesmo ω, porém com diferentes fases. Essa operação é um tanto mais evidente se for usado a notação complexa (e depois tomada a parte real), ou seja,

$$\tilde{f}_3 = \tilde{A}_1 e^{i(kz-\omega t)} + \tilde{A}_2 e^{i(kz-\omega t)} = \tilde{A}_3 e^{i(kz-\omega t)} \Rightarrow f_3(z,t) = A_3\cos(kz - \omega t + \delta_3)$$

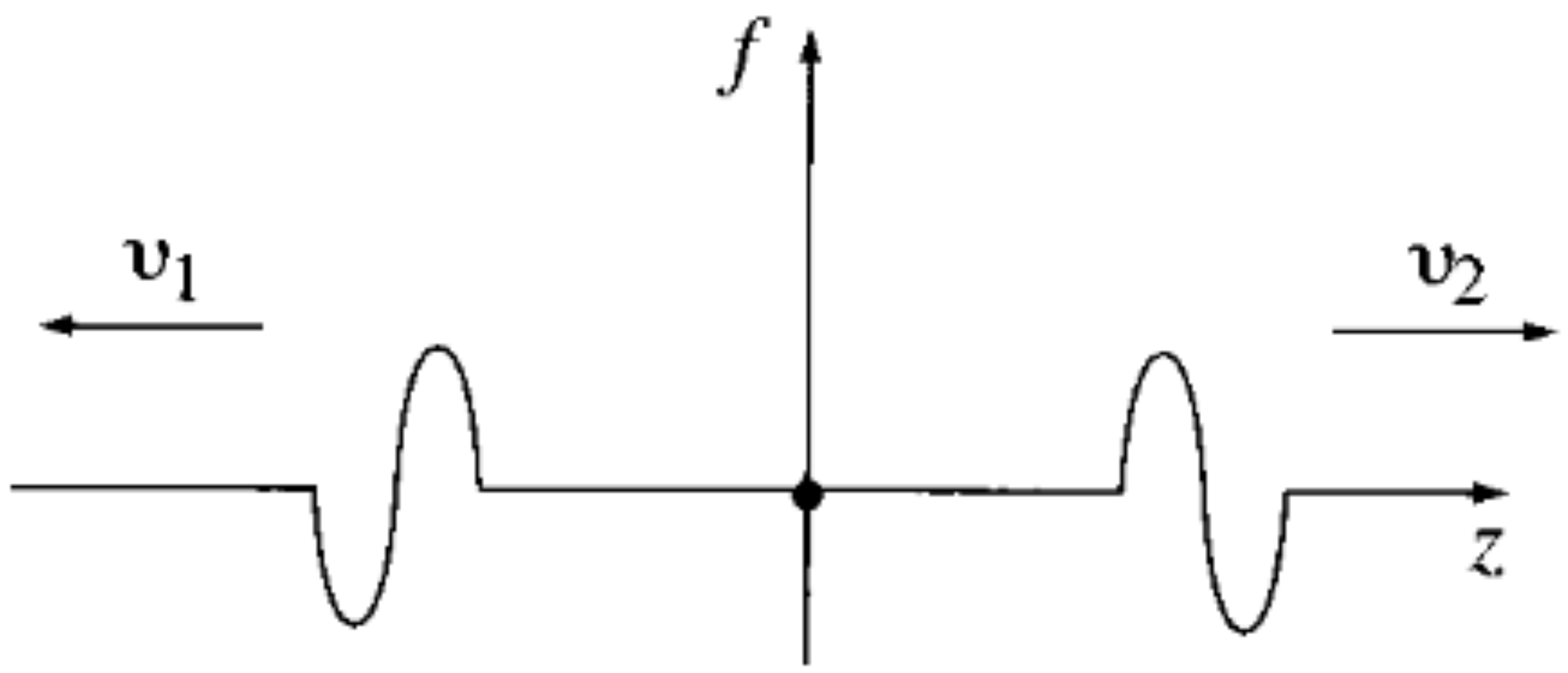
$$\tilde{A}_3 = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2, \quad \text{or} \quad A_3 e^{i\delta_3} = A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2};$$

Execício: 9.3

Condições de contorno



(a) Incident pulse



(b) Reflected and transmitted pulses

- Onda incidente: $\tilde{f}_I(z,t) = \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0),$
- Onda transmitida: $\tilde{f}_T(z,t) = \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, \quad (z > 0),$
- Onda refletida: $\tilde{f}_R(z,t) = \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0),$
- Importante notar:
  - ω é sempre o mesmo, para todos os casos. Por quê?
  - k depende do meio, o sinal na frente de k na onda refletida indica inversão direção de propagação.

As figuras mostram um único comprimento de onda, não a onda completa.

Condições de contorno

- Temos as seguintes condições de contorno
  - Continuidade da função: $f_I(0,t) + f_R(0,t) = f_T(0,t)$
  - Continuidade da derivada: $\partial_z(f_I + f_R)(0,t) = \partial_z f_T(0,t)$

$$\tilde{f}_I(z,t) = \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0),$$
$$\tilde{f}_T(z,t) = \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, \quad (z > 0),$$
$$\tilde{f}_R(z,t) = \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0),$$

- Não precisamos assumir que as frequências são as mesmas, da primeira é possível deduzir isso. Na forma complexa temos:

$$\tilde{A}_I e^{-i\omega_1 t} + \tilde{A}_R e^{-i\omega_2 t} = \tilde{A}_I e^{-i\omega_3 t}.$$

- Logo, a única solução possível é $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$. Caso não seja evidente, uma forma de concluir isso é integrando em t, o que leva a deltas de Dirac. Lembrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k)$.
- Concluído que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \equiv \omega$, a continuidade também fornece que $\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T$
- E da última equação temos $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$ (a menos de $n\pi$). — Usando que e^{ikx} é base.
- Logo, $A_I \pm A_R = A_T$. — A diferença de sinal vem da indeterminação de $n\pi$ acima.

Condições de contorno II

- Das duas equações de contorno, vem

$$\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T, \quad k_1(\tilde{A}_I - \tilde{A}_R) = k_2\tilde{A}_T$$

- Logo, combinando elas,

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)\tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)\tilde{A}_I.$$

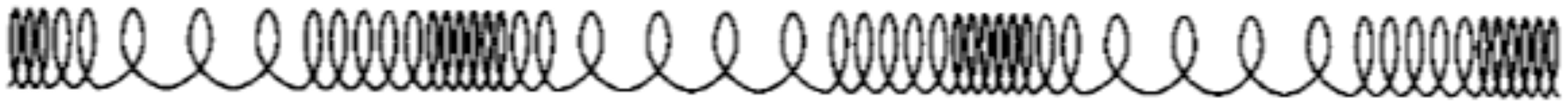
$$\tilde{A}_R = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}\right)\tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1}\right)\tilde{A}_I.$$

$$A_R e^{i\delta_R} = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}\right) A_I e^{i\delta_I}, \quad A_T e^{i\delta_T} = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1}\right) A_I e^{i\delta_I}$$

- E isso leva também a outra forma de determinar as fases. As expressões acima também podem ser usadas para mostrar que as fases são todas iguais, a menos da diferença de π. A fase δ_R tem uma ambiguidade aditiva de π, que é fixada tal que as amplitudes sejam positivas.

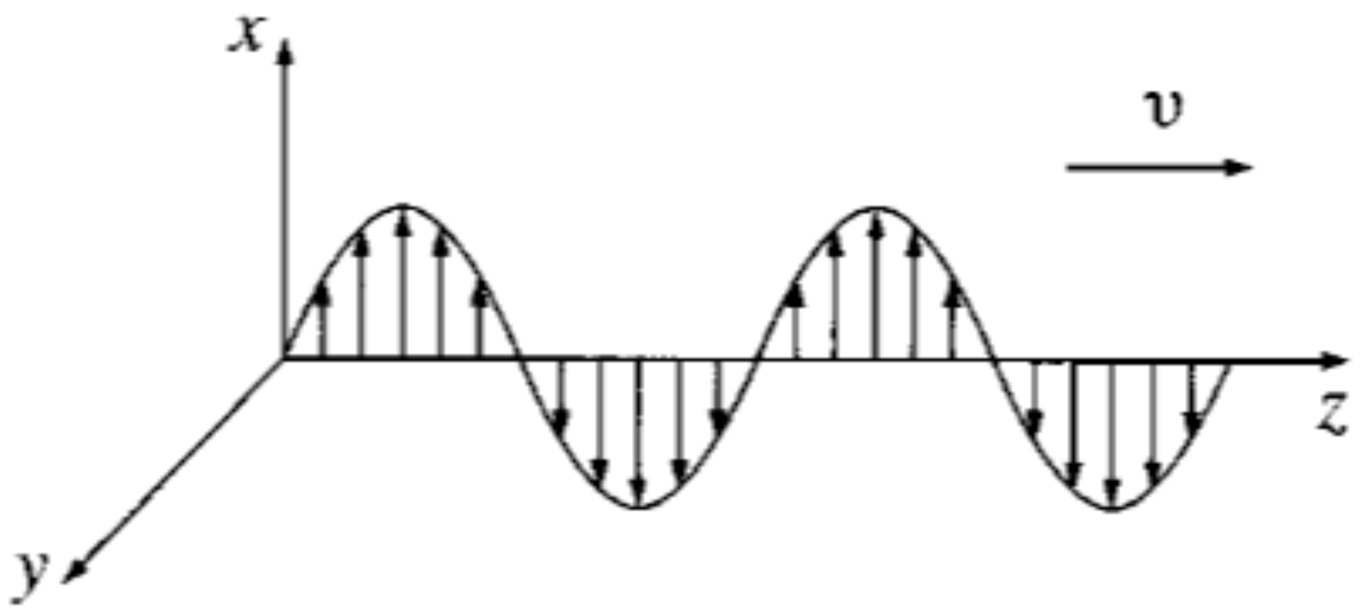
Ondas transversas, longitudinais e polarização

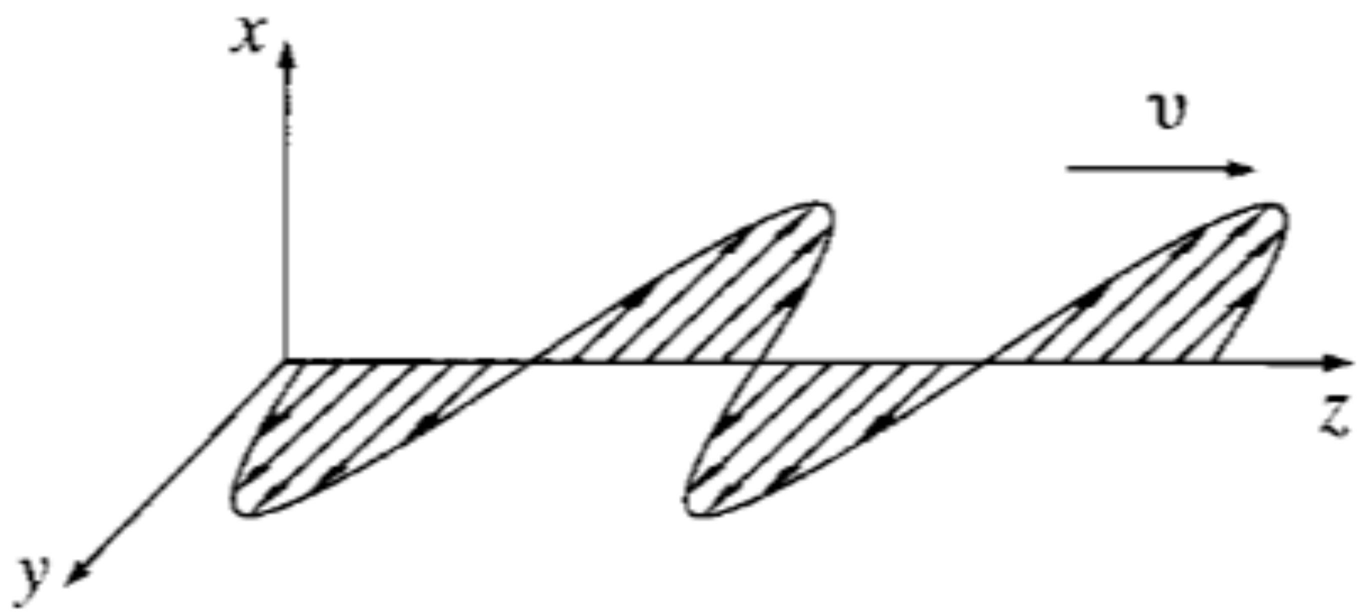
- Ondas sonoras constituem exemplo de ondas longitudinais. Têm a forma de onda no espaço de densidade. Não têm polarização, a direção de propagação e a amplitude da onda são toda a informação necessária



$$\rho(z,t) = \tilde{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

- As ondas geradas por uma corda balançando são ondas transversais. Para essas, além da amplitude e da direção de propagação, elas carregam informação com respeito à direção das oscilações no espaço perpendicular à propagação.





Ondas planas determinam planos de igual amplitude.

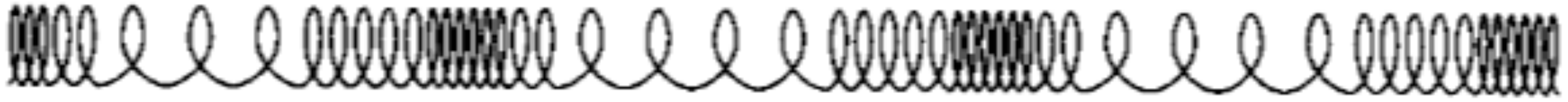
$$\mathbf{f}(z,t) = \tilde{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\,\hat{\mathbf{n}}$$

Polarização constante,

determina um plano.

Ondas transversas, longitudinais e polarização

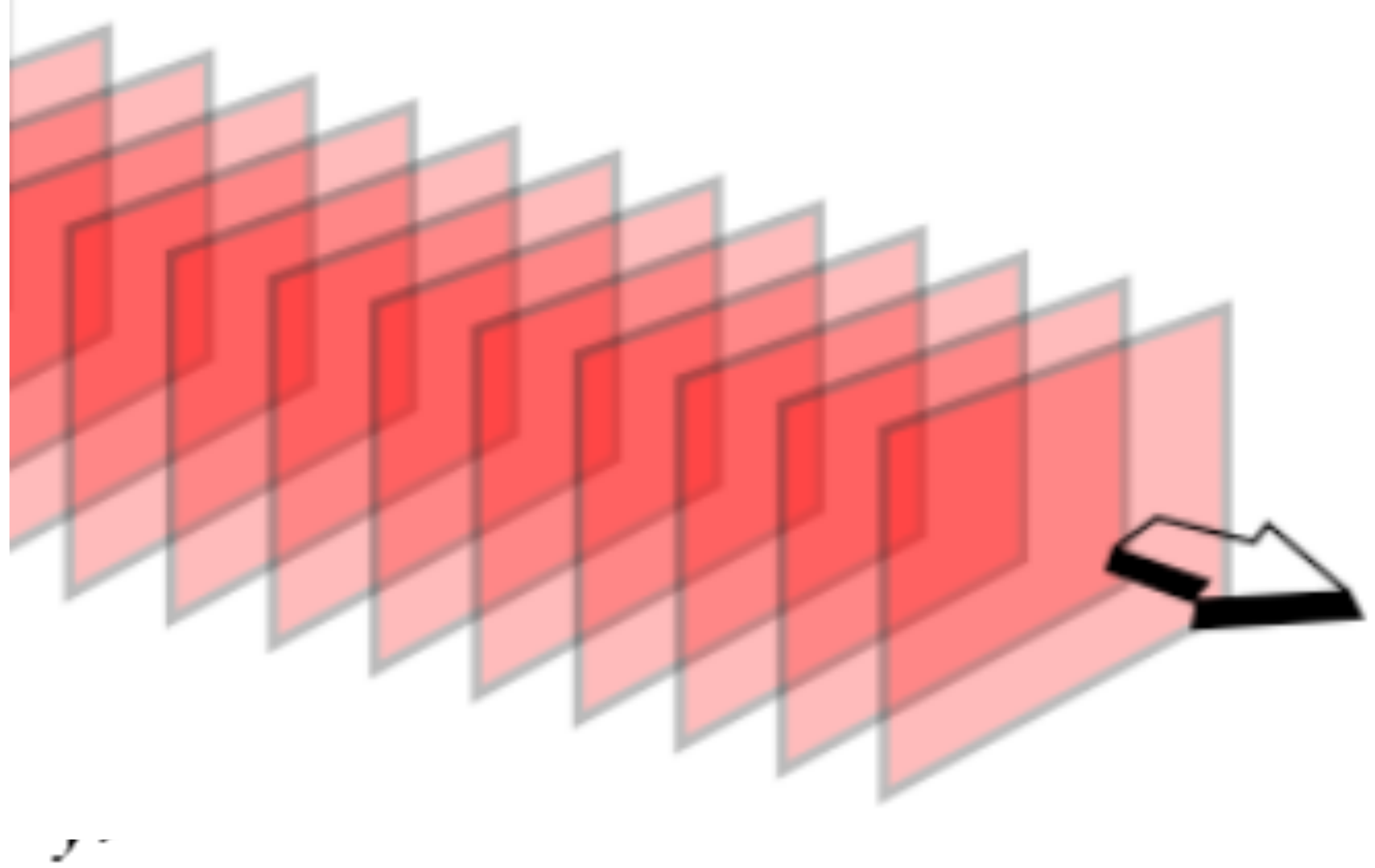
- Ondas sonoras constituem exemplo de ondas longitudinais. Têm a forma de onda no espaço de densidade. Não têm polarização, a direção de propagação e a amplitude da onda são toda a informação necessária

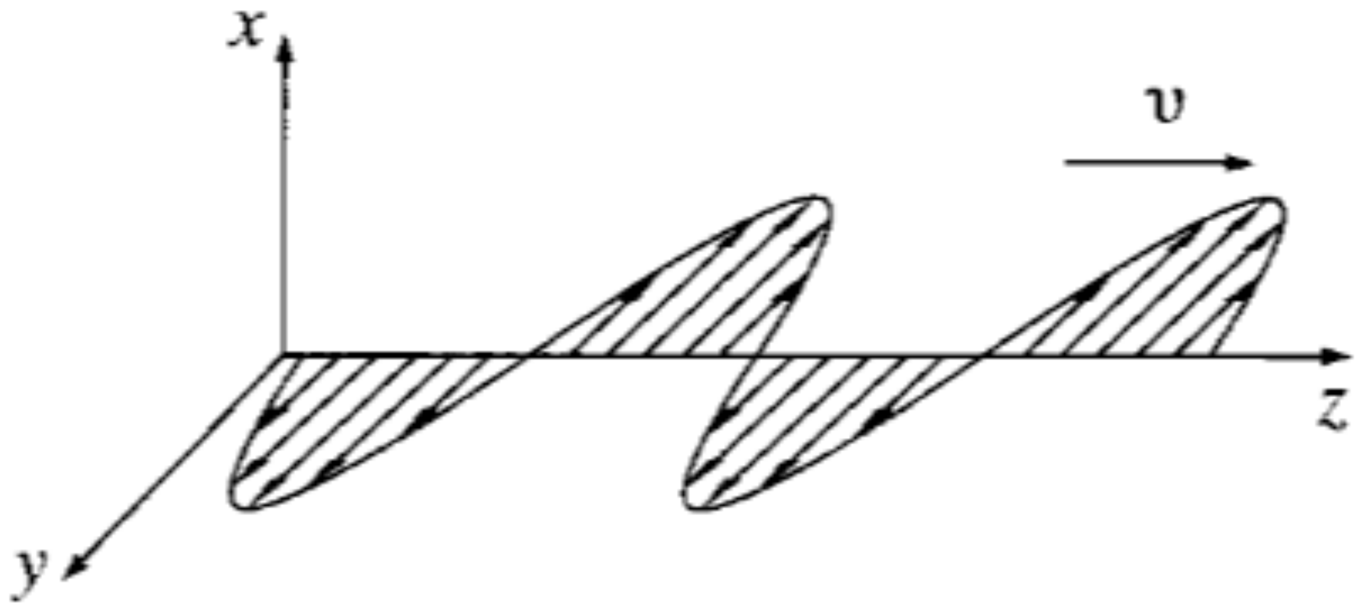


$$\rho(z,t) = \tilde{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

- As ondas geradas por uma corda balançando são ondas transversais. Para essas, além da amplitude e da direção de propagação, elas carregam informação com respeito à direção das

dicular à propagação.





$$\mathbf{f}(z,t) = \tilde{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\,\hat{\mathbf{n}}$$

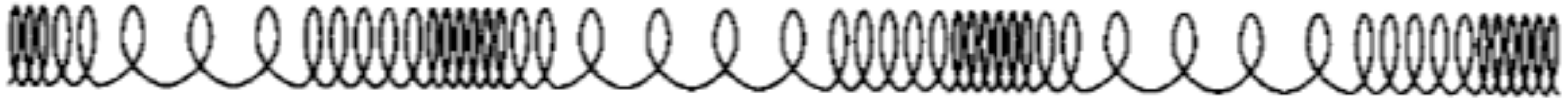
Polarização constante,

determina um plano.

Ondas planas determinam planos de igual amplitude.

Ondas transversas, longitudinais e polarização

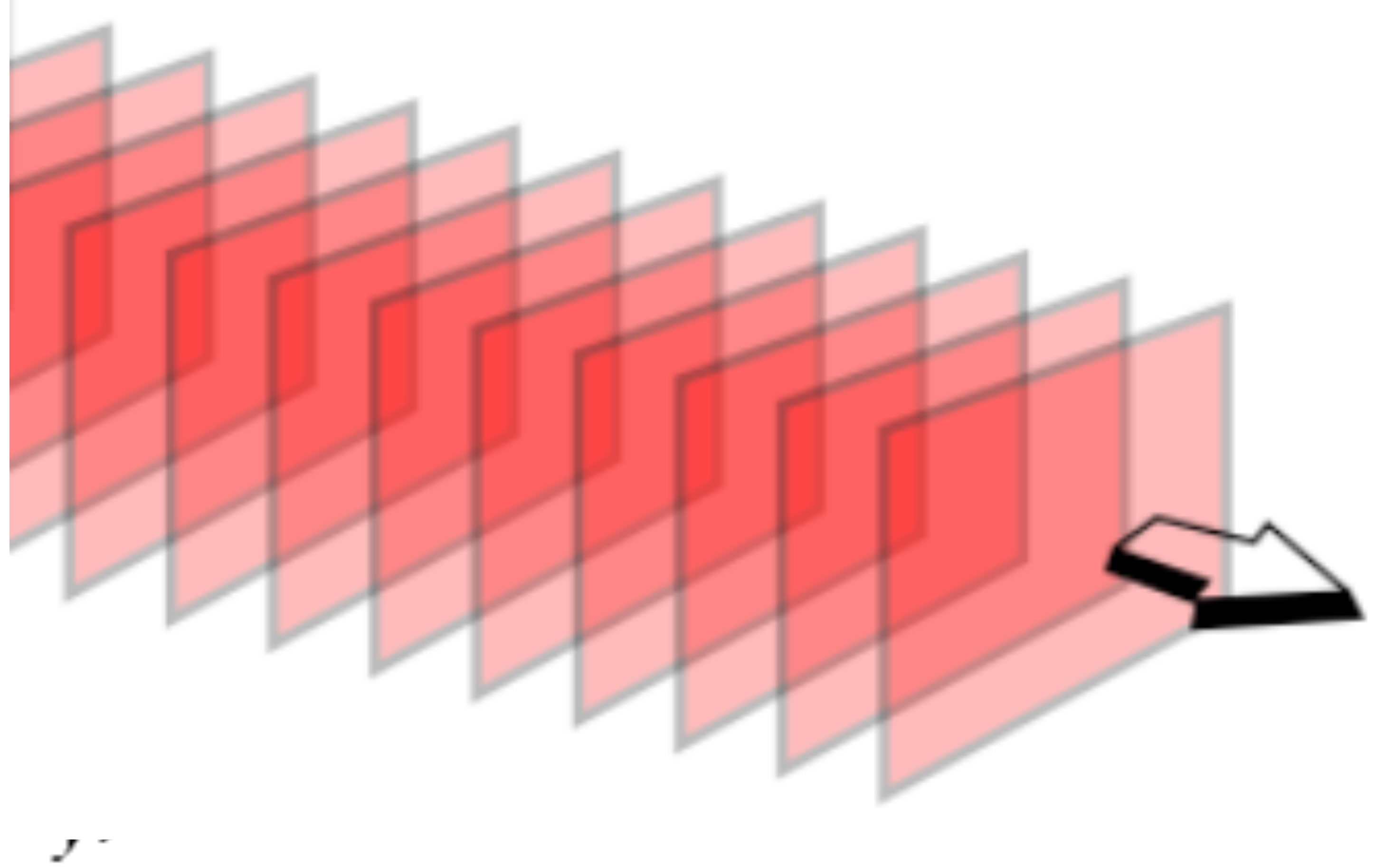
- Ondas sonoras constituem exemplo de ondas longitudinais. Têm a forma de onda no espaço de densidade. Não têm polarização, a direção de propagação e a amplitude da onda são toda a informação necessária

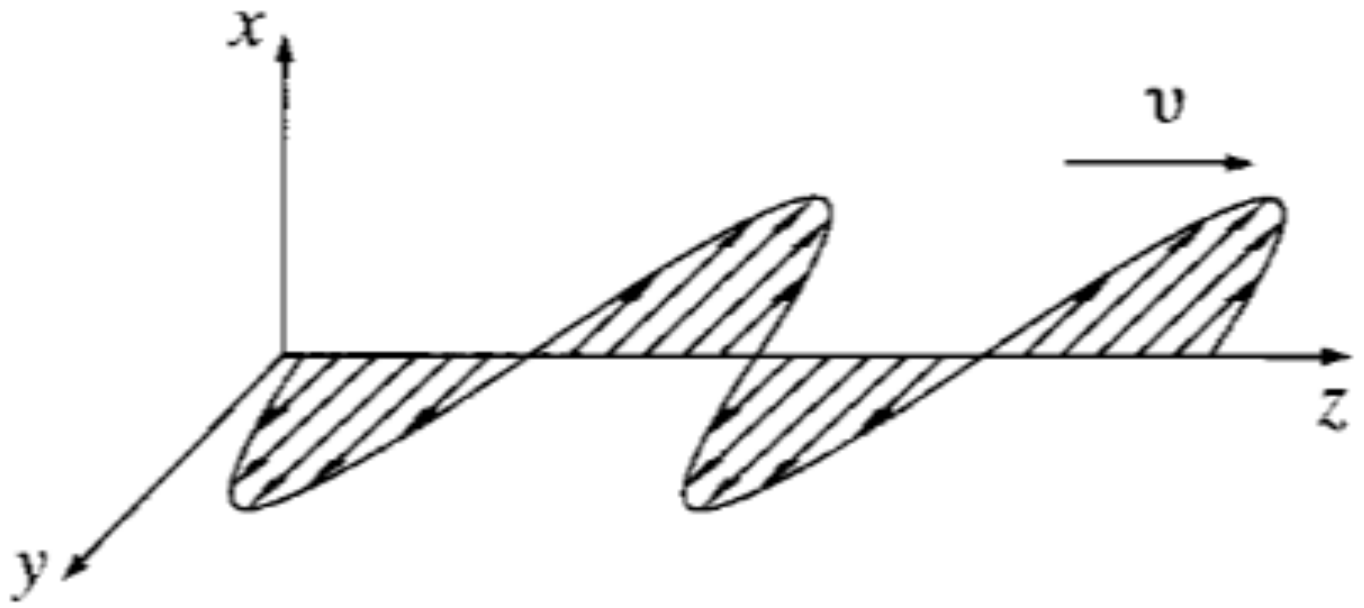


$$\rho(z,t) = \tilde{A} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

- As ondas geradas por uma corda balançando são ondas transversais. Para essas, além da amplitude e da direção de propagação, elas carregam informação com respeito à direção das
dicular à propagação.

Exercício: 9.8





$$\mathbf{f}(z,t) = \tilde{A} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}\,\hat{\mathbf{n}}$$

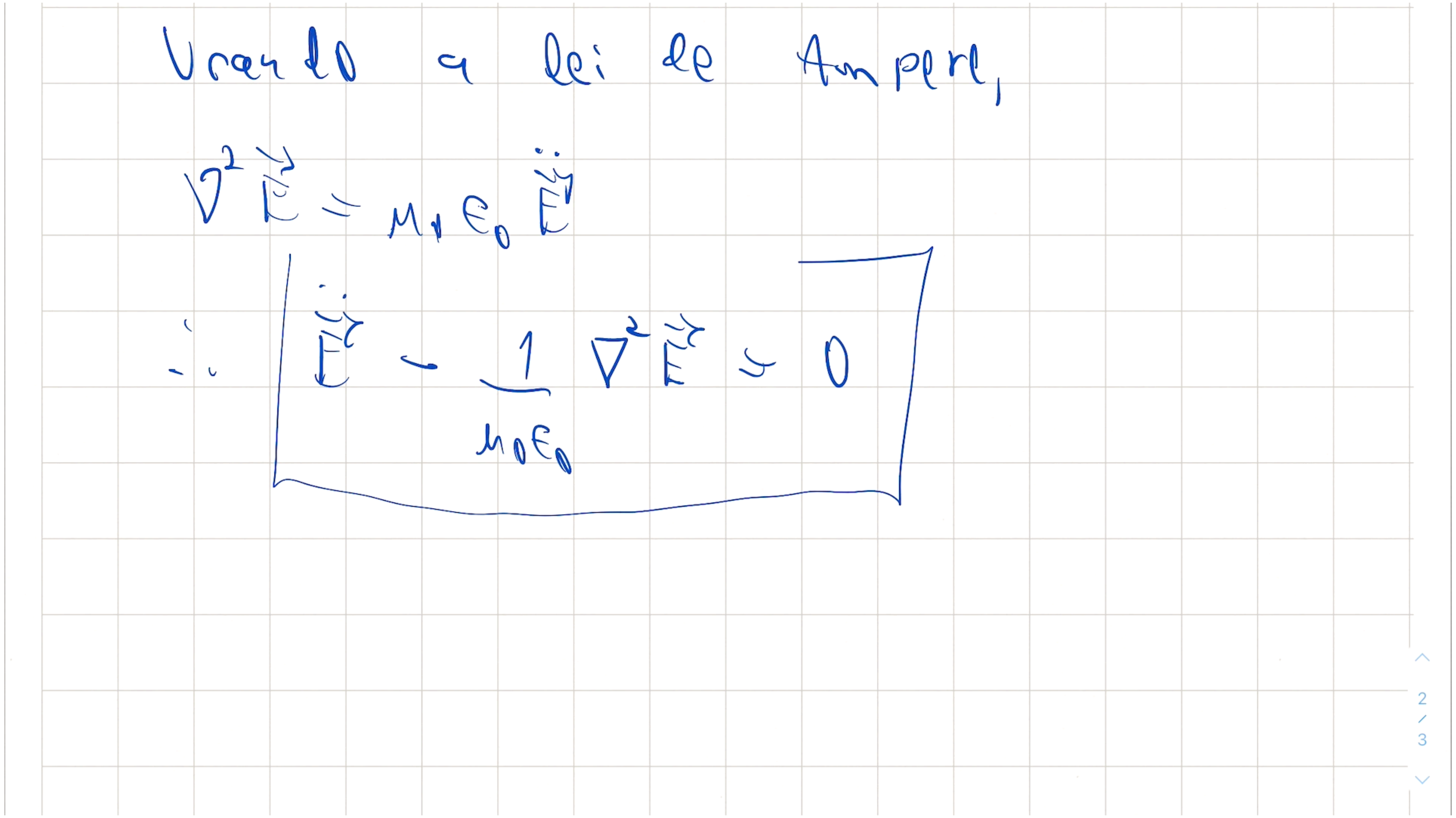
Ondas planas determinam planos de igual amplitude.

Polarização constante,

determina um plano.

Ondas eletromagnéticas no vácuo

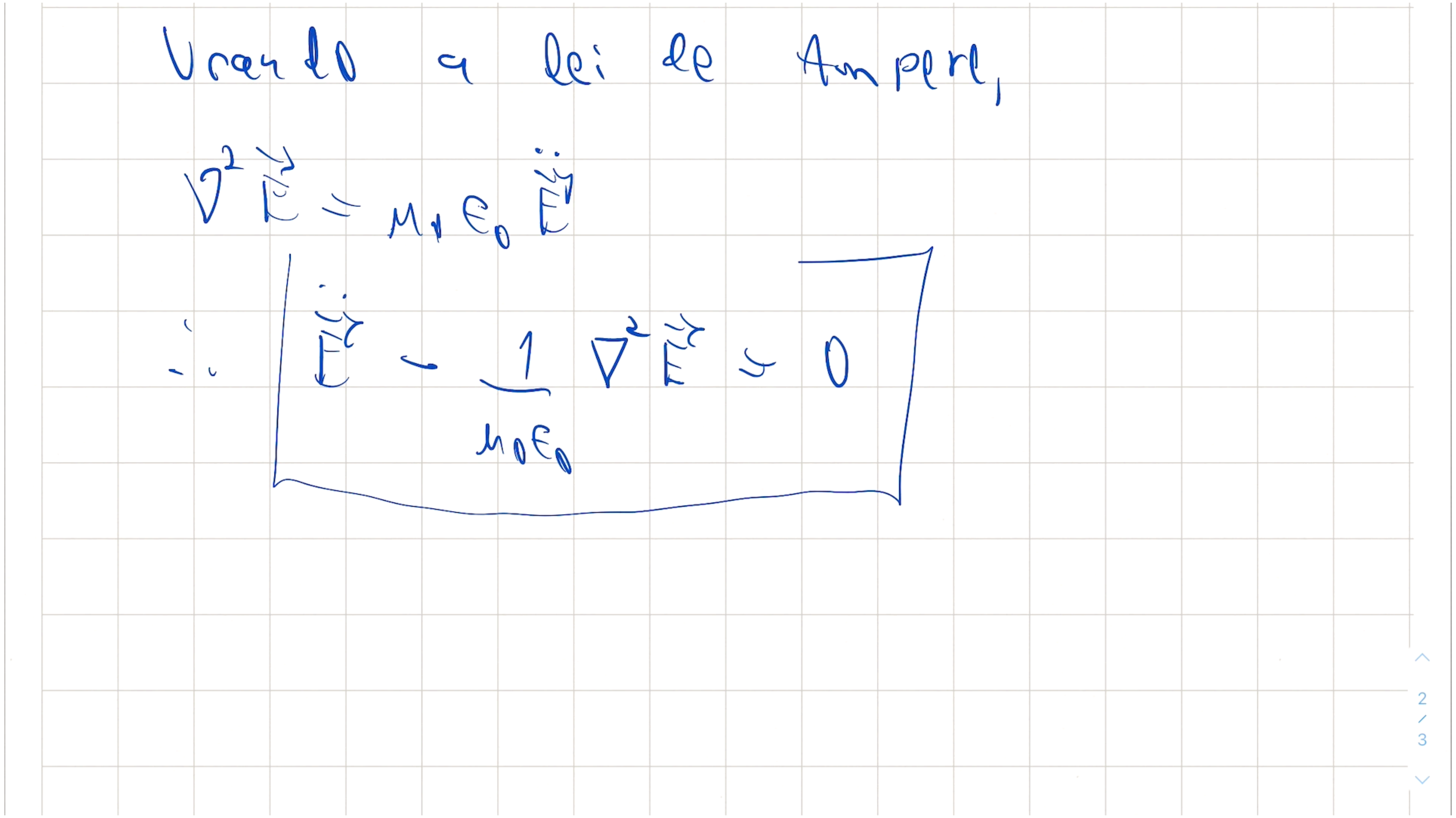
- O vídeo abaixo mostra que o campo elétrico satisfaz uma equação de onda.



- **Exercícios:** i) Mostre a identidade vetorial usada no vídeo. ii) Mostre que o campo magnético também satisfaz equação de onda e com a mesma velocidade de propagação ($c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$).

Ondas eletromagnéticas no vácuo

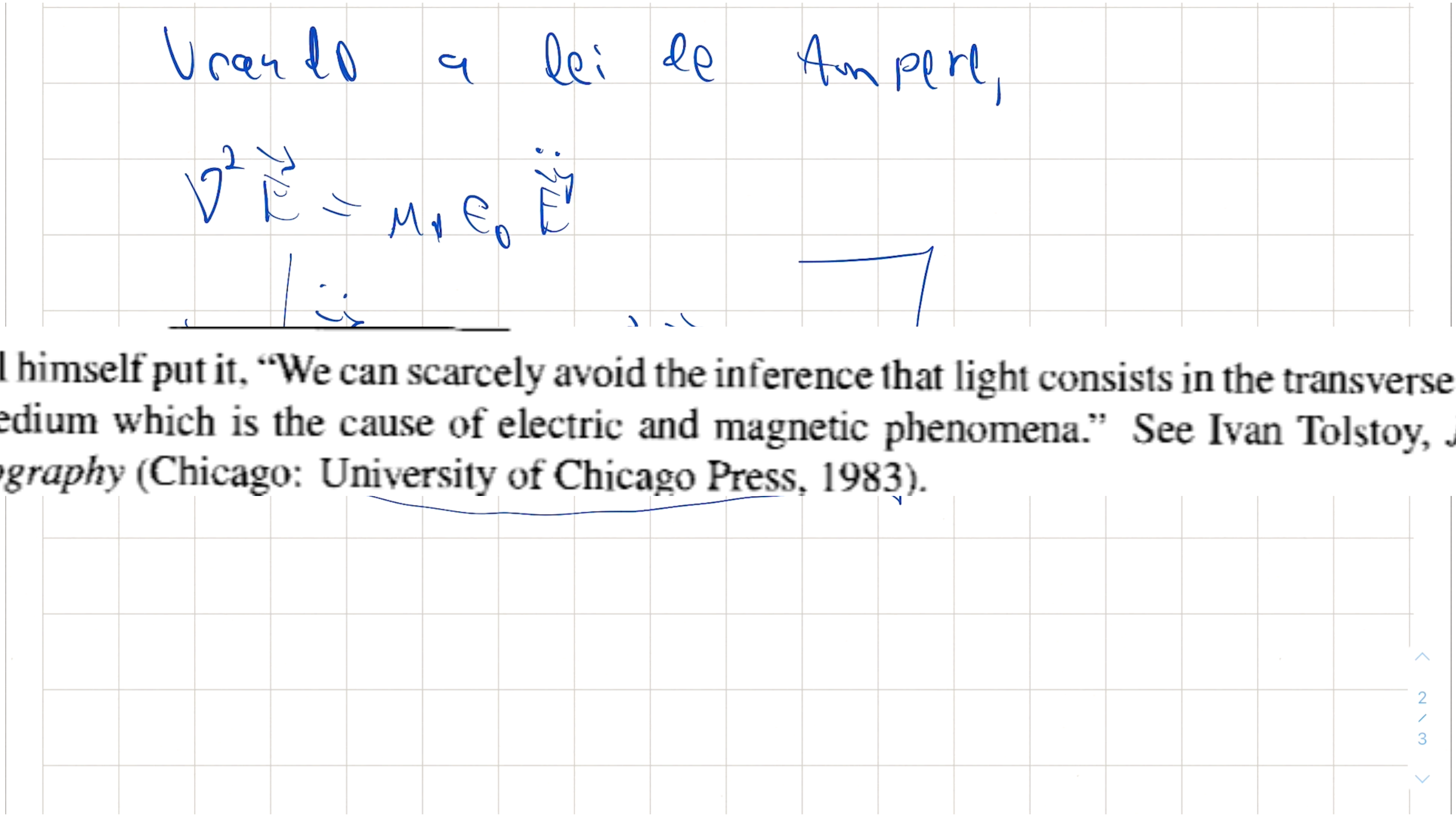
- O vídeo abaixo mostra que o campo elétrico satisfaz uma equação de onda.



- **Exercícios:** i) Mostre a identidade vetorial usada no vídeo. ii) Mostre que o campo magnético também satisfaz equação de onda e com a mesma velocidade de propagação ($c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$).

Ondas eletromagnéticas no vácuo

- O vídeo abaixo mostra que o campo elétrico satisfaz uma equação de onda.



- **Exercícios:** i) Mostre a identidade vetorial usada no vídeo. ii) Mostre que o campo magnético também satisfaz equação de onda e com a mesma velocidade de propagação ($c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$).

Ondas monocromáticas planas: $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$

- Considere a seguinte onda plana no vácuo

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},$$

com $\tilde{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_0 e^{i\delta_E}$. Lembrar que $\mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}$, mas $\mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{E}}_0 \neq \mathbf{E}_0$.

- Se $\mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{E}}$ satisfaz as equações de Maxwell, então $\tilde{\mathbf{E}}$ também vai satisfazer, pois a parte complexa só difere da parte real por uma fase (e as equações de Maxwell são invariantes por translação espacial).

- No vácuo, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, logo também é válido $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0$ e temos que

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0.$$

- **Exercício:** Sendo $\mathbf{A}_0$ vetor constante, mostre que $\nabla \cdot \left(\mathbf{A}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right) = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ e $\nabla \times \left(\mathbf{A}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right) = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

- Enfatizo que as equações de Maxwell levam a soluções de onda. Contudo, as equações de onda sozinhas não têm toda a dinâmica. A relação $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ só pareceu pois usamos a lei de Gauss.

Ondas monocromáticas planas: $\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$

- Embora tenhamos obtidos duas equações de onda independentes, é de se esperar que ondas elétricas e as ondas magnéticas não possam existir independentemente. A lei de Faraday, em especial, impossibilita a existência de ondas magnéticas sem as elétricas.

- Vamos considerar a possibilidade de uma onda magnética com o mesmo $\mathbf{k}$ e ω de $\mathbf{E}$, mas em geral com outra fase,

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}.$$

com $\tilde{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 e^{i\delta_B}$. Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, analogamente ao caso elétrico temos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$.

- Da lei de Faraday, $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$, vem $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\dot{\tilde{\mathbf{B}}}$, logo

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \omega \tilde{\mathbf{B}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i\delta_E} = \omega \mathbf{B}_0 e^{i\delta_B} \quad \Rightarrow \quad \delta_E = \delta_B \ \text{ e } \ \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad .$$

- Pelo último produto vetorial, vemos que

$$\mathbf{B} \perp \mathbf{E} \ \text{ e } \ \mathbf{B} \perp \mathbf{k}\,.$$

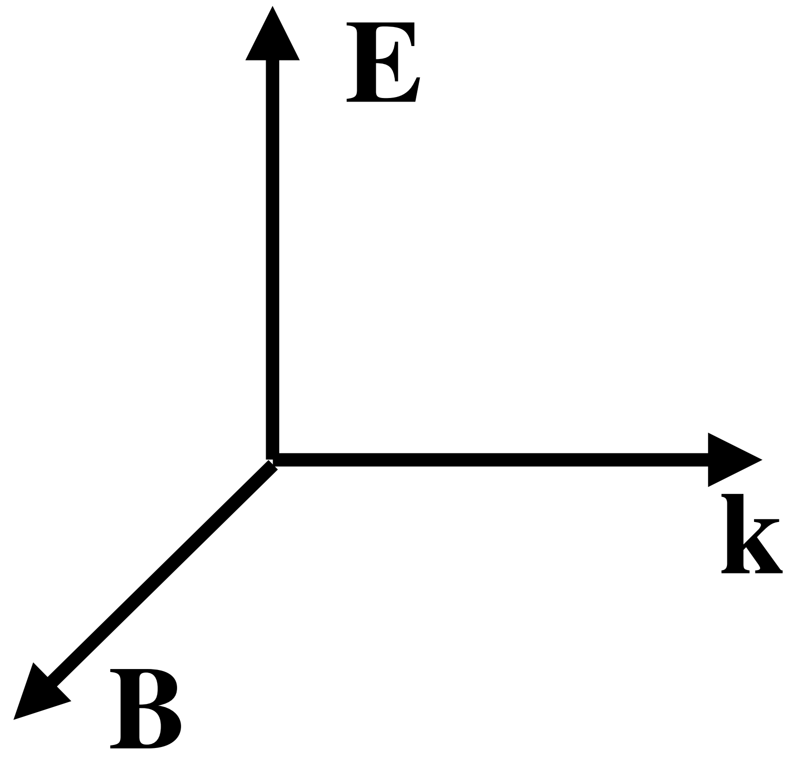
Ondas monocromáticas planas: E determina B

- Juntamos o que vimos até aqui, podemos dizer que, se uma onda plana de campo elétrico passa por dado ponto, nesse mesmo ponto deve passar uma onda plana de campo magnético (do contrário a lei de Faraday nos dá $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, logo $\mathbf{E} = \mathbf{0}$).

- **Exercício simples**: verifique que se $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ e se $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

- Assim, nesse pondo em que passa a onda elétrica e a magnética, temos um sistema de 3 vetores mutualmente perpendiculares, como na figura ao lado.

- Voltando a $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$, vemos também que $kE = \omega B = kcB \ \Rightarrow B = c^{-1}E$, em que $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$.

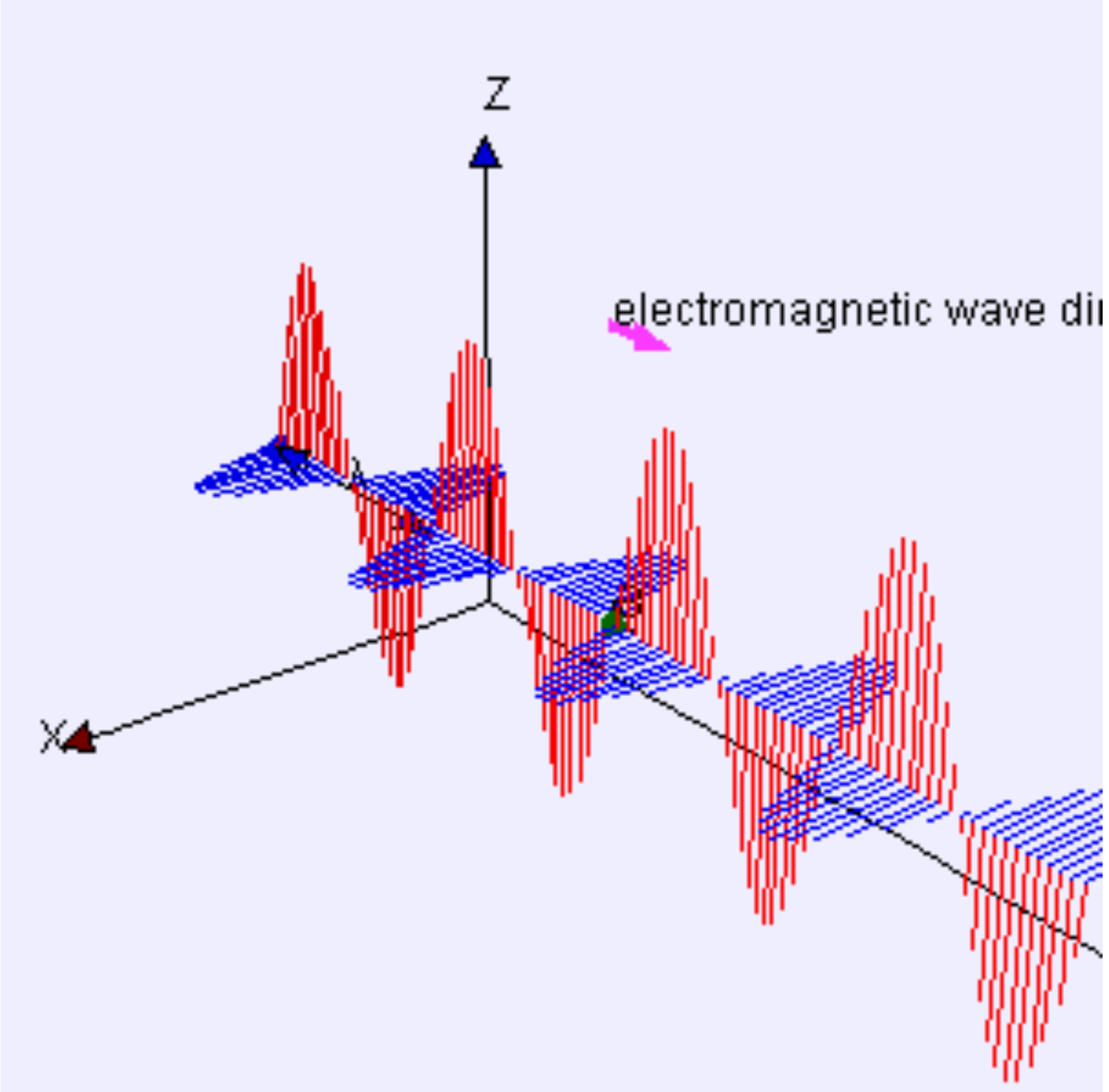


- A equação de Ampère fornece $\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega \mathbf{E}$, logo ela não leva neste caso a algo novo.

- Ondas planas monocromáticas de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são soluções das equações de Maxwell e se propagam juntamente, com a mesma fase, com a velocidade da luz e com a mesma direção e sentido, mas com polarizações que diferem de $\pi/2$. E vemos que $\mathbf{E}$ determina $\mathbf{B}$, assim como $\mathbf{B}$ determina $\mathbf{E}$.

Ondas monocromáticas planas: sol. geral

- Agregando o que foi obtido, podemos escrever a seguinte solução para ondas planas eletromagnéticas:



$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{\mathbf{n}},$$

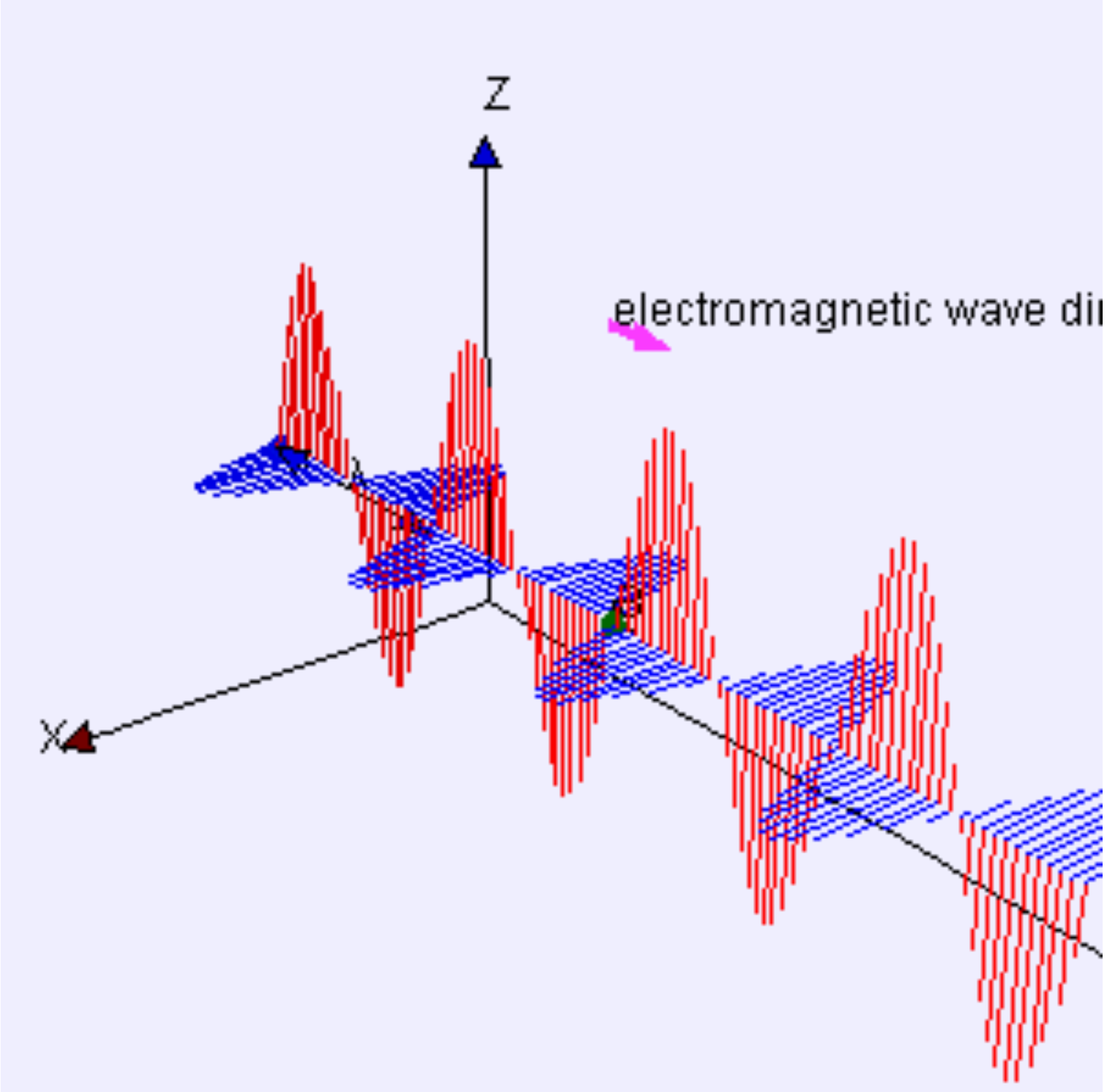
$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}},$$

com $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$.

- **Exercício:** Verifique a solução acima inserindo essas expressões nas equações de Maxwell.

Ondas monocromáticas planas: sol. geral

- Agregando o que foi obtido, podemos escrever a seguinte solução para ondas planas eletromagnéticas:



$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{\mathbf{n}},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}},$$

com $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0.$

- **Exercício:** Verifique a solução acima inserindo essas expressões nas equações de Maxwell.

Ondas monocromáticas planas: sol. geral

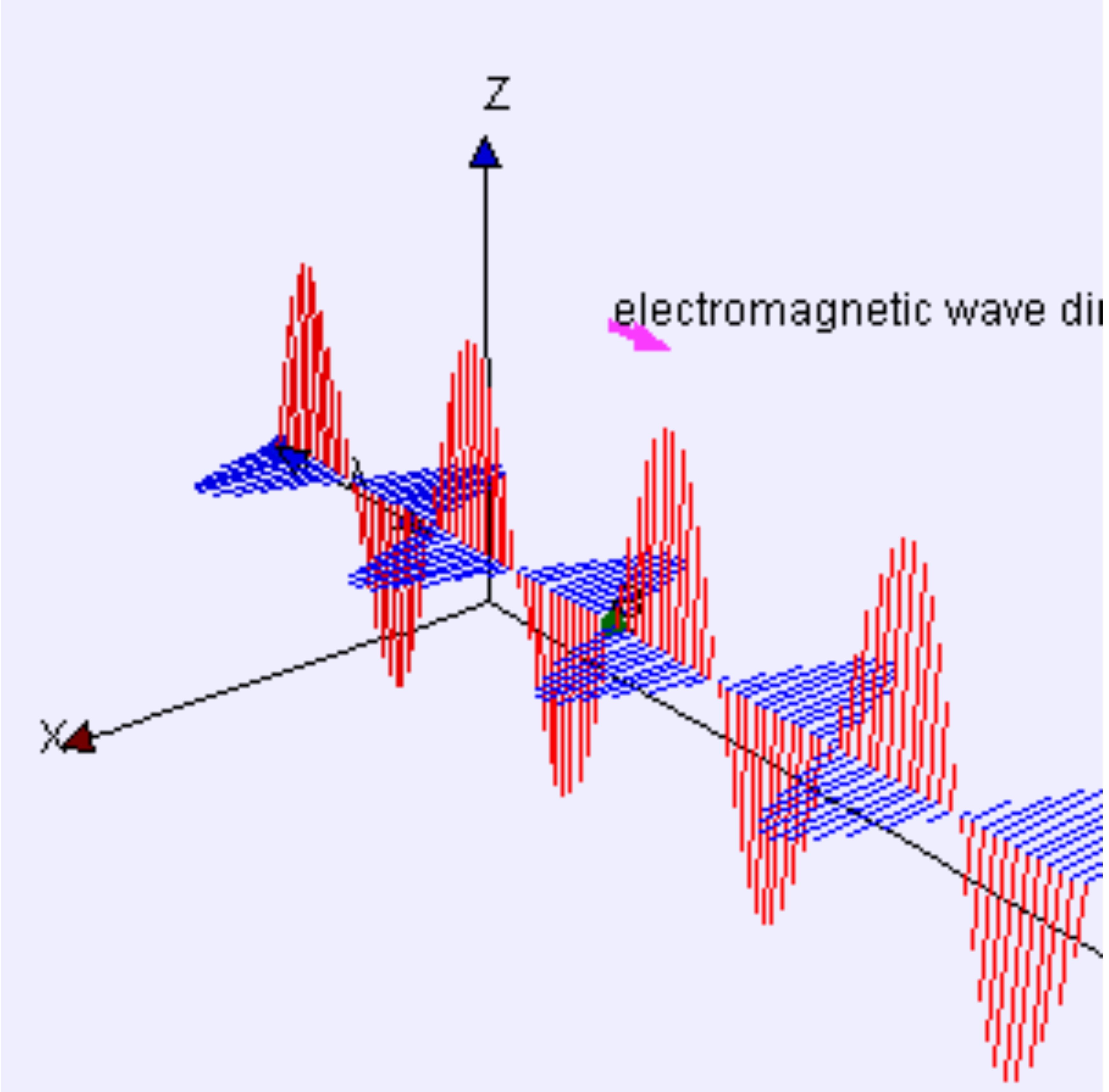
- Agregando o que foi obtido, podemos escrever a seguinte solução para ondas planas eletromagnéticas:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{\mathbf{n}},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}}\times\tilde{\mathbf{E}},$$

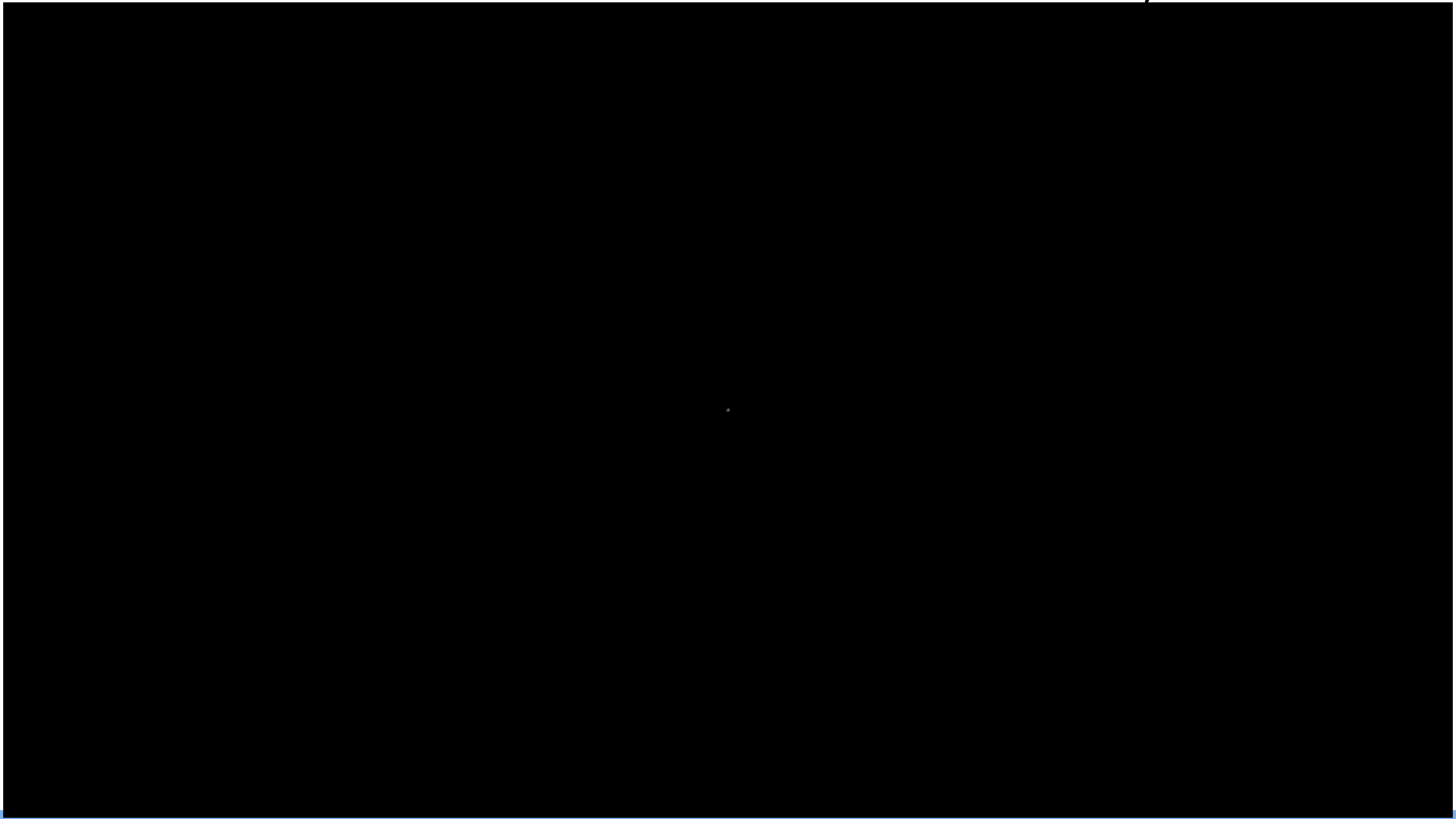
com $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$.

Exercício: 9.9

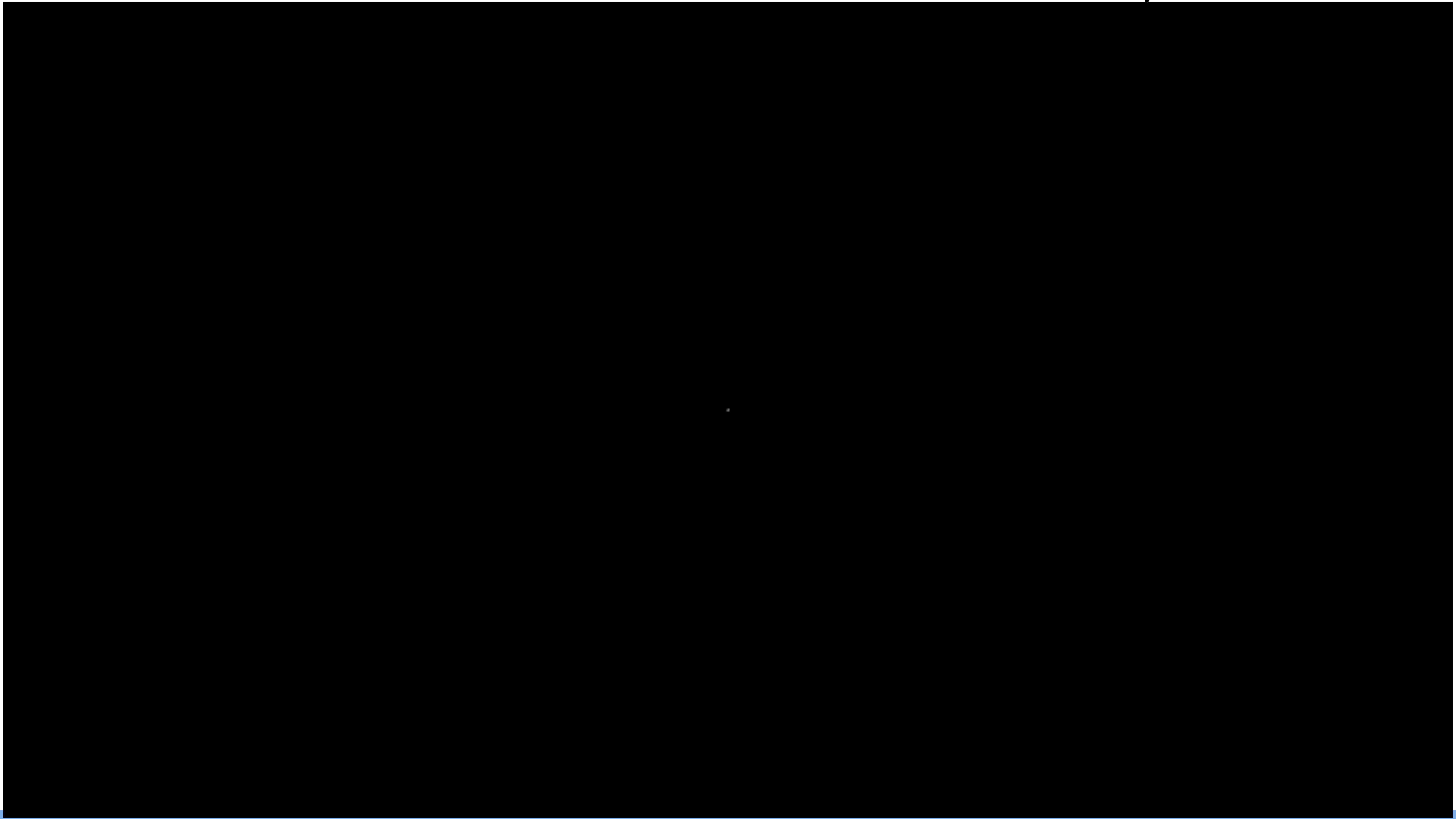


- **Exercício:** Verifique a solução acima inserindo essas expressões nas equações de Maxwell.

Antes, uma observação sobre ε_{ijk}



Antes, uma observação sobre ε_{ijk}



Momento e energia de ondas eletromagnéticas

- Vimos que a densidade de energia de campos eletromagnéticos em geral é dada por

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right)$$

- Tudo o que precimsamos fazer para responder que está no título é particularizar **E** e **B** para o caso de ondas eletromagnéticas. Como, para ondas eletromagnéticas, **B** pode ser visto como uma função de **E**, podemos expressar u integralmente em função de **E**, a saber,

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)$$

- Note que u oscila no tempo e no espaço, o que é de se esperar para uma onda. Muitas vezes é de interesse sarbe a densidade de energia média ao longo de um período. A média de uma grandeza A em seu período T é dada por

- $$\langle A \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\,dt\,,\ \text{logo}\ \langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Poderia-se usar π (ou $n\pi$) para o período de $\cos^2$, não tem diferença.

Momento e energia de ondas eletromagnéticas

- Uma importante e simples aplicação é para o vetor de Poynting. Lembremos que esse vetor foi introduzido como a corrente associada à densidade de energia dos campos elétricos e magnéticos.

- Ao contrário das correntes de carga ou de massa, essa corrente não tem a forma $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. Contudo, ao calcular $\mathbf{S}$ para ondas eletromagnéticas encontramos $\mathbf{S} = uc\hat{\mathbf{k}}$, em que $\hat{\mathbf{k}}$ dá a direção de propagação e c é a velocidade da luz.

- As médias para as densidade de energia, vetor de Poynting e densidade de momento são, para uma onda que se propaga na direção do eixo z, dadas pela expressão ao lado.

- $\mathbf{S}$ tem dimensão de densidade de energia vezes velocidade, logo tem dimensão de potência por área. A potência média por área é chamada de intensidade e é simplesmente dada por $I \equiv \langle S \rangle$.

- **Exercício** (resposta no livro): Mostre que a pressão de radiação é $P = I/c$.

- **Exercícios:** 9.10, 9.11 e 9.12.

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2,$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2\,\hat{\mathbf{z}},$$

$$\langle \boldsymbol{\wp} \rangle = \frac{1}{2c}\epsilon_0 E_0^2\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Propagação de ondas eletromagnéticas na matéria

- Vamos considerar agora ondas num meio linear e homogêneo sem cargas livres. Ou seja, as eq's relevantes são

$$\text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

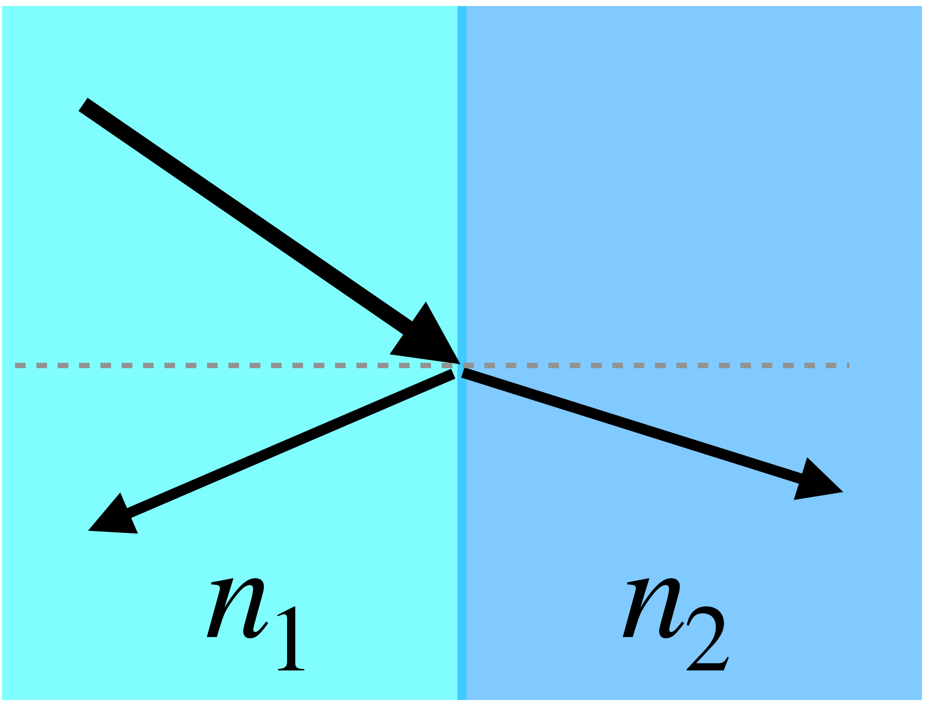
- Verifique que as eq's acima estão corretas a partir das eq's gerais de Maxwell na matéria.
- Notem que está tudo igual à eletrodinâmica no vácuo, exceto que $\mu_0\epsilon_0 \to \mu\epsilon$. Assim, há soluções de ondas, mas velocidade propagação é agora dada por $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$.
- É útil introduzir o **índice de refração** n, como segue:

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}. \qquad \boxed{n > 1}$$

- Essa propagação se torna interessante quando há mudança entre meios diferentes, cada um com o seu valor de n.

Transição entre dois meios diferentes

- Considere o seguinte problema da interface de dois meios homogêneos e lineares, mas cada um com um índice de refração diferente.



- Já sabemos como as ondas eletromagnéticas se propagame em cada um desses meios individualmente, precisamos entender como é a transição de um meio linear para outro. Para isso, precisamos saber as condições de contorno na transição de um meio para outro.
- Como as equações de Maxwell precisam ser satisfeitas em todos os pontos, inclusive na transição entre os meios, logo encontra-se que

$$\text{(i)}\ \epsilon_1 E_1^{\perp} = \epsilon_2 E_2^{\perp}, \quad \text{(iii)}\ \mathbf{E}_1^{\parallel} = \mathbf{E}_2^{\parallel},$$

$$\text{(ii)}\ B_1^{\perp} = B_2^{\perp}, \quad \text{(iv)}\ \frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_2^{\parallel}.$$

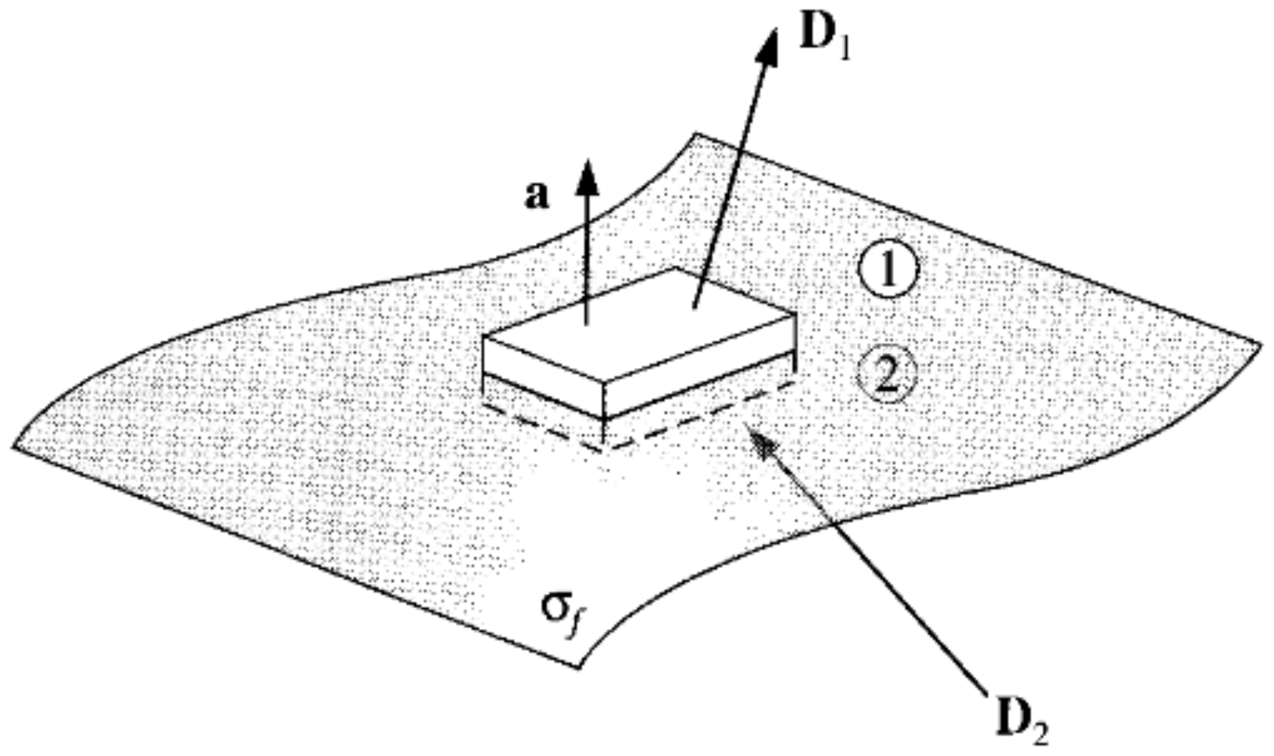
Note que qualquer vetor $\mathbf{A}$ pode ser sempre decomposto em $\mathbf{A} = A^{\perp}\hat{\mathbf{n}}_s + \mathbf{A}^{\parallel}$, em que $\hat{\mathbf{n}}_s$ é versor normal à superfície e $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{A}^{\parallel} = 0$.

-

Transição entre dois meios diferentes: condições de contorno

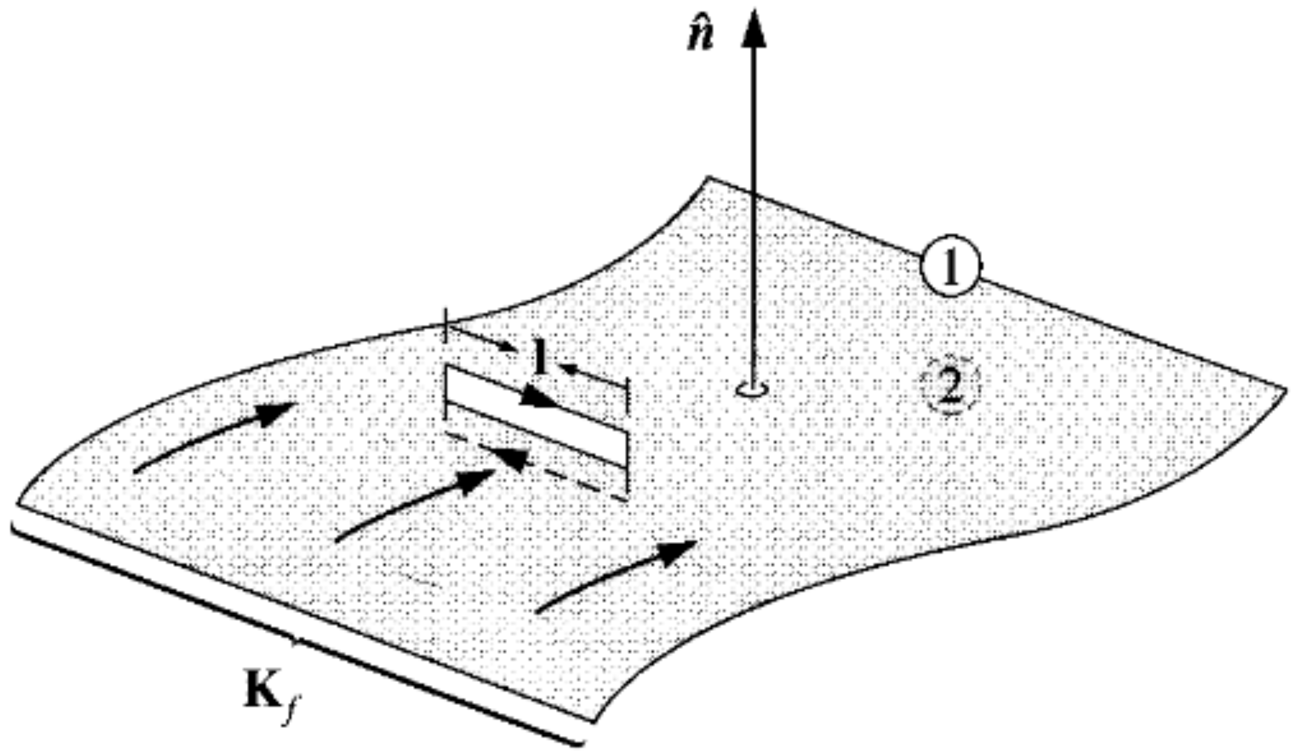
- Integrando as eq's de Maxwell <u>sem cargas livres</u> e num meio linear (não necessariamente homogêneo) temos

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = 0$$
$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = 0$$



$$D_1^\perp = D_2^\perp \qquad \epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp$$
$$B_1^\perp = B_2^\perp \qquad B_1^\perp = B_2^\perp$$

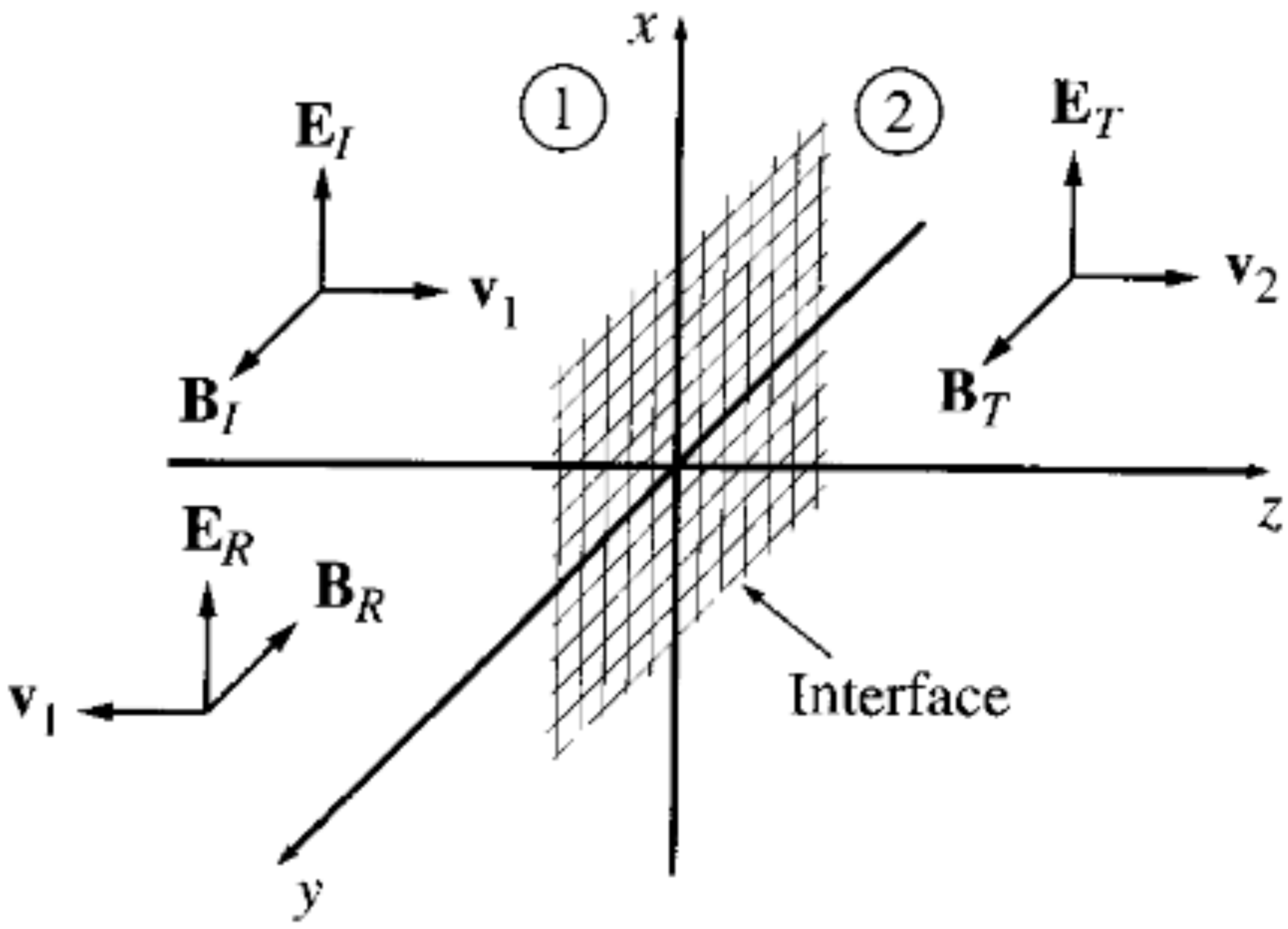
$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$$
$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a}$$



$$\mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel \qquad \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel$$
$$\mathbf{H}_1^\parallel = \mathbf{H}_2^\parallel \qquad \frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_2^\parallel$$

Reflexão e transmissão: incidência normal

- Começaremos agora a tratar do problema de reflexão e transmissão de ondas eletromagnéticas. Para começar, trataremos do caso em que a incidência é normal ao plano. Como, para ondas eletromagnéticas, o campo elétrico determina o campo magnético, basta tratarmos do campo magnético.



- Podemos escrever os campos elétricos incidente, refletido e transmitido da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{E}}_X = \tilde{\mathbf{E}}_{0_X} e^{i(\mathbf{k}_X \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

em que X pode assumir I, T, ou R, referente a incidente, transmitido ou refletido.

- Para simplificar o problema, vamos alinhar (adaptar) o sistema de coordenadas tal que $\mathbf{k}_I = k_I \hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{E}_{0_I} = E_{0_I} \hat{\mathbf{x}}$. Ademais, fixamos $z = 0$ como a posição da superfície que divide os meios.

Reflexão e transmissão: incidência normal

$$\tilde{\mathbf{E}}_X = \tilde{\mathbf{E}}_{0_X} e^{i(k_X z - \omega t)}.$$

- Como a incidência é normal à superfície e sendo $\hat{\mathbf{n}}_s$ o vetor normal à superfície (que tem sentido oposto à incidência), podemos escrever,

$$\hat{\mathbf{n}}_s = -\hat{\mathbf{k}}_I = -\hat{\mathbf{z}}, \;\; \mathbf{k}_I = -\mathbf{k}_R = k_1 \hat{\mathbf{k}}_I \text{ e } \mathbf{k}_T = k_2 \hat{\mathbf{k}}_I .$$

- Usando a condição de contorno i (ver o lembrete ao lado):

$$\epsilon_1 (\tilde{E}_I^\perp + \tilde{E}_R^\perp) = \epsilon_2 \tilde{E}_T^\perp.$$

- Entretanto, como $\hat{\mathbf{k}}_I \parallel \hat{\mathbf{n}}_s$, temos que $E_X^\perp = 0$. Logo a equação acima é trivialmente satisfeita.
- O mesmo vale para a condição de contorno ii: é trivialmente satisfeita.
- A condição iii não é trivial e fornece, em $z = 0$,

$$\tilde{\mathbf{E}}_I^\parallel + \tilde{\mathbf{E}}_R^\parallel = \tilde{\mathbf{E}}_T^\parallel \;\Rightarrow\; \tilde{\mathbf{E}}_{0_I}^\parallel e^{-i\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}_{0_R}^\parallel e^{-i\omega t} = \tilde{\mathbf{E}}_{0_T}^\parallel e^{-i\omega t} \;\Rightarrow\; \tilde{E}_{I_0} + \tilde{E}_{0_R} = \tilde{E}_{0_T}.$$

Lembrete:

i) $\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp$

ii) $B_1^\perp = B_2^\perp$

iii) $\mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel$

iv) $\dfrac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_1^\parallel = \dfrac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_2^\parallel$

Reflexão e transmissão: incidência normal

- Por fim, a condição iv também é não trivial, mas precisaremos antes expressá-la em função do campo elétrico. Como $\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{v}\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}$, temos

$$\tilde{\mathbf{B}}_I = \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)}\hat{\mathbf{y}}\,,\ \tilde{\mathbf{B}}_R = -\frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0_R} e^{i(-k_1 z - \omega t)}\hat{\mathbf{y}} \ \text{ e } \ \tilde{\mathbf{B}}_T = \frac{1}{v_2}\tilde{E}_{0_T} e^{i(k_2 z - \omega t)}\hat{\mathbf{y}}.$$

- **Exercício:** Verifique deduza diretamente as expressões acima de **B**.
- Consequentemente, da condição iv temos que

$$\frac{1}{\mu_1 v_1}(\tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2}\tilde{E}_{0_T}.$$

- Como, para uma grande diversidade de materiais, μ varia pouco em torno de μ_0, podemos em boa aproximação eliminar a dependência de μ_1, μ_2 da eq. acima. Juntando as duas eqs. de contorno não triviais conclui-se que

$$E_{0_R} = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right| E_{0_I}, \quad E_{0_T} = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right) E_{0_I}$$

Lembrete:

i) $\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp$

ii) $B_1^\perp = B_2^\perp$

iii) $\mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel$

iv) $\frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_2^\parallel$

Lembrar que $n = c/v$.

Reflexão e transmissão: coeficientes R e T

- Vimos que a intensidade (potência média por área) das ondas eletromagnéticas é dada por $I = \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2$.
- Definindo os coeficientes de reflexão e transmissão como

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{e} \quad T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2},$$

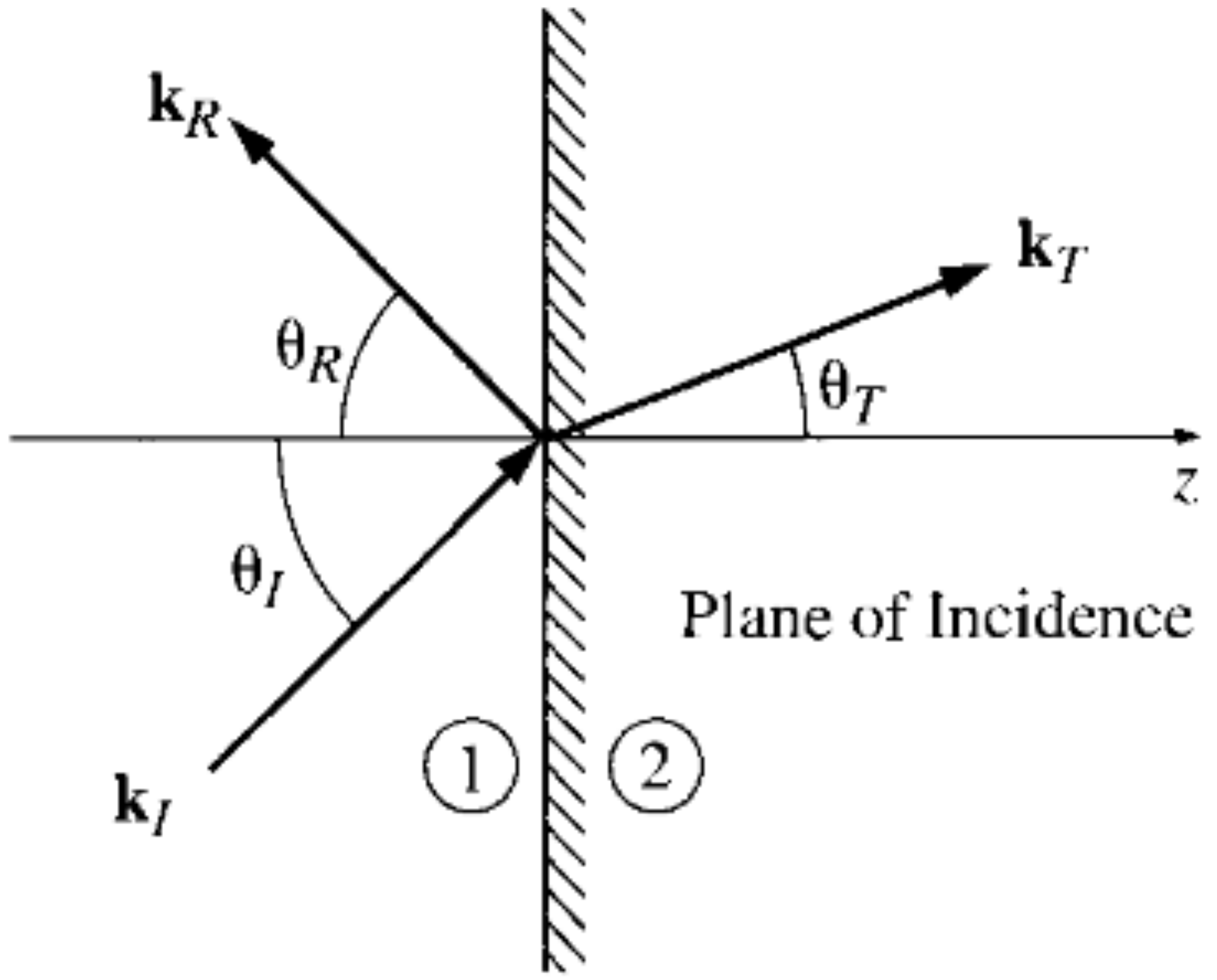
temos

$$R + T = 1.$$

- Em outras palavras, a energia média da onda incidente é separada numa parte transmitida e outra refletida, sendo a soma dessas partes igual à energia média incidente. Pode-se verificar que este resultado é obtido ainda que a aproximação $\mu_1 = \mu_2$ não seja usada.
- Exemplo: Para o ar, $n_1 \approx 1$ e para o vidro $n_2 \approx 1.5$, logo $R = 0.04$ e $T = 0.96$ (lembrar que isso é válido para a incidência normal).

Reflexão e transmissão: incidência oblíqua

- Começamos pelas expressões gerais do campo elétrico para este caso:



$$\tilde{\mathbf{E}}_I(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0_I} e^{i(\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \qquad \tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0_R} e^{i(\mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0_T} e^{i(\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

- Questão: o que ocorreria se a freq. não fosse a mesma?
- Como a freq. é a mesma para todas as componentes, temos

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega, \quad \text{or} \quad k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T$$

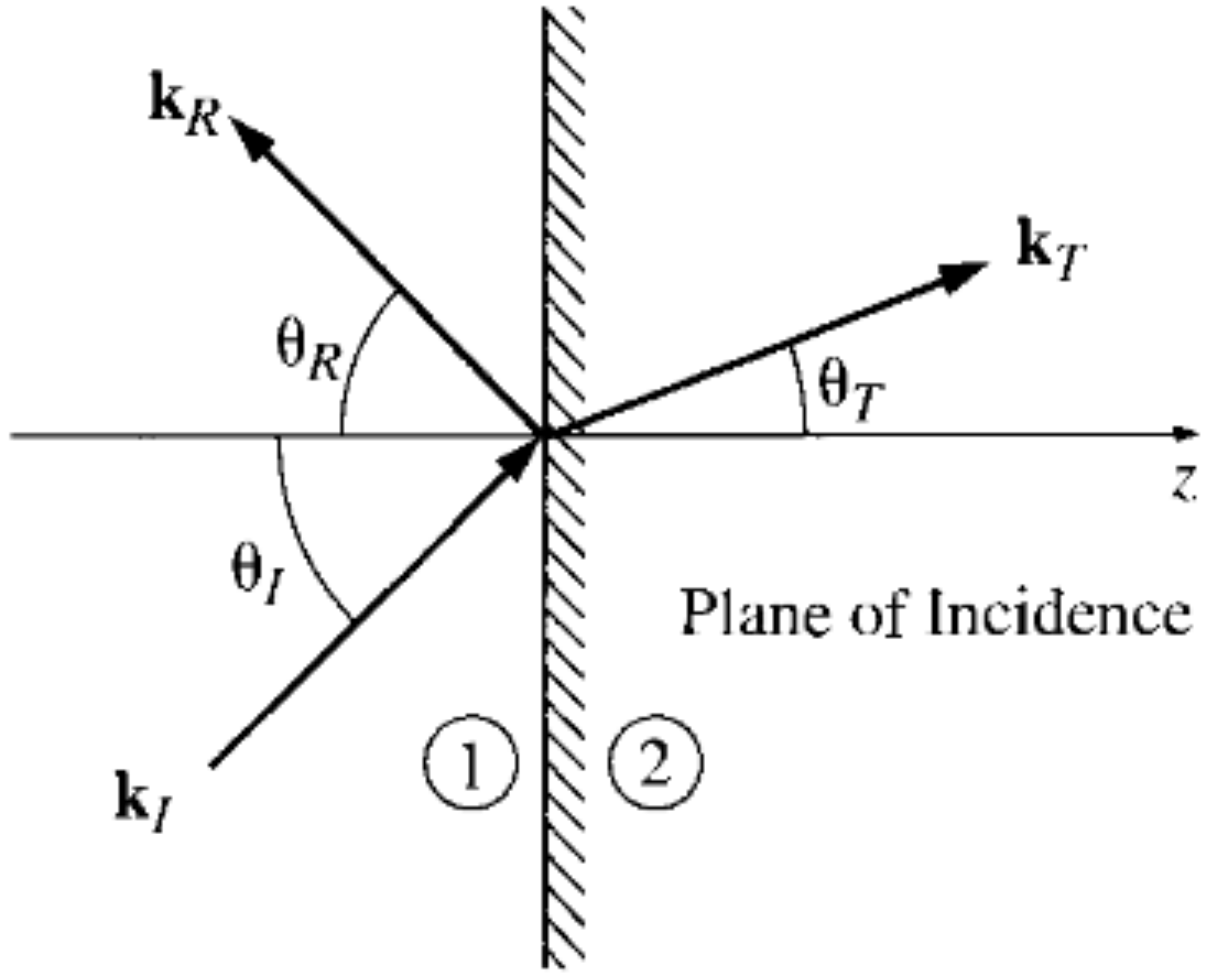
- Temos agora de aplicar as condições de contorno. Contudo, qualquer que seja a condição de contorno em $z = 0$, teremos equações da seguinte forma (válida na superfície):

$$(\ )e^{i(\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + (\ )e^{i(\mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = (\ )e^{i(\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \Rightarrow \mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}$$

Lembrar que $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ é base.

Reflexão e transmissão: incidência oblíqua

- Essa simples observação, devida não a uma condição de contorno específica, mas à forma geral das condições de contorno já é suficiente para deduzirmos 3 leis da ótima geométrica.



- **Primeira lei:** As ondas incidente, refletida e transmitida formam são coplanares entre si e com o vetor normal à superfície que divide os meios. Esse plano é chamado de plano de incidência.

- **Segunda lei:** $\theta_I = \theta_R$ — veja o gráfico ao lado.

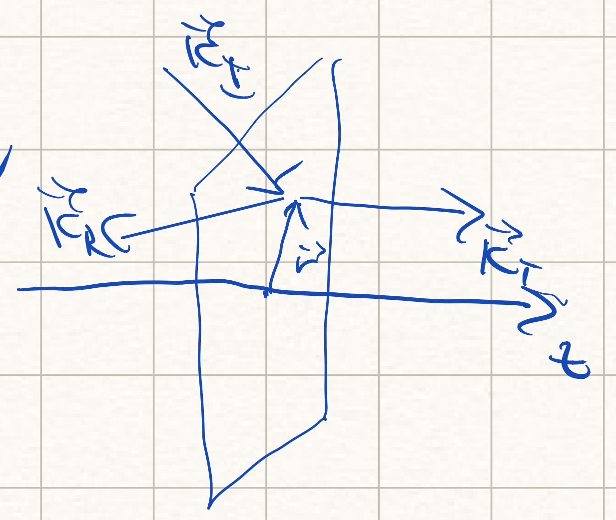
- **Terceira lei:** Conhecida como lei de Snell: $\dfrac{\text{sen}\,\theta_T}{\text{sen}\,\theta_I} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

- Demonstrações... Ver PDF a seguir....

Primeira Lei

$\vec{k}_I\cdot\vec{r} = \vec{k}_R\cdot\vec{r} = \vec{k}_T\cdot\vec{r}$ no plano $z=0$.

Sem perda de generalidade, seja $k_{I_y}=0$



$\therefore\ k_{I_x} x = k_{R_x} x + k_{R_y} y$

Note que o lado direito depende de y, enquanto o lado esquerdo não.

Isso só é possível se $k_{R_y}=0$.

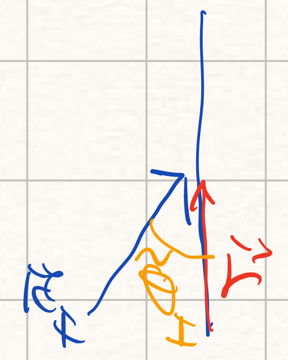
Analogamente, temos tb $k_{T_y}=0$.

Logo $\vec{k}_R$, $\vec{k}_T$ e $\vec{k}_I$ são coplanares, estão no plano $y=0$.

No plano $y=0$ também se encontra $\vec{n}_s$, o vetor normal à superfície. ∎

Segunda Lei

$$\vec{k}_I\cdot\vec{r} = k_I\, r\cos\tilde{\theta}_I$$
$$\vec{k}_R\cdot\vec{r} = k_I\, r\cos\tilde{\theta}_R$$



$$\therefore\ \cos\tilde{\theta}_I = \cos\tilde{\theta}_R$$
$$\therefore\ \tilde{\theta}_I = \tilde{\theta}_R$$
$$\therefore\ \theta_I = \theta_R$$

Note que $\theta_I = \frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}_I$

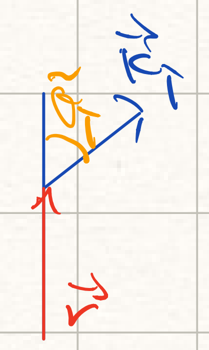
∎

Terceira lei

$$\vec{k}_I\cdot\vec{r} = k_I\, r\cos\tilde{\theta}_I = k_I\, r\,\mathrm{sen}\,\theta_I$$
$$\vec{k}_T\cdot\vec{r} = k_T\, r\cos\tilde{\theta}_T = k_T\, r\,\mathrm{sen}\,\theta_T$$

Como $\vec{k}_I\cdot\vec{r} = \vec{k}_T\cdot\vec{r}$,

$$\boxed{\frac{k_I}{k_T} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta_T}{\mathrm{sen}\,\theta_I} = \frac{n_1}{n_2}}$$

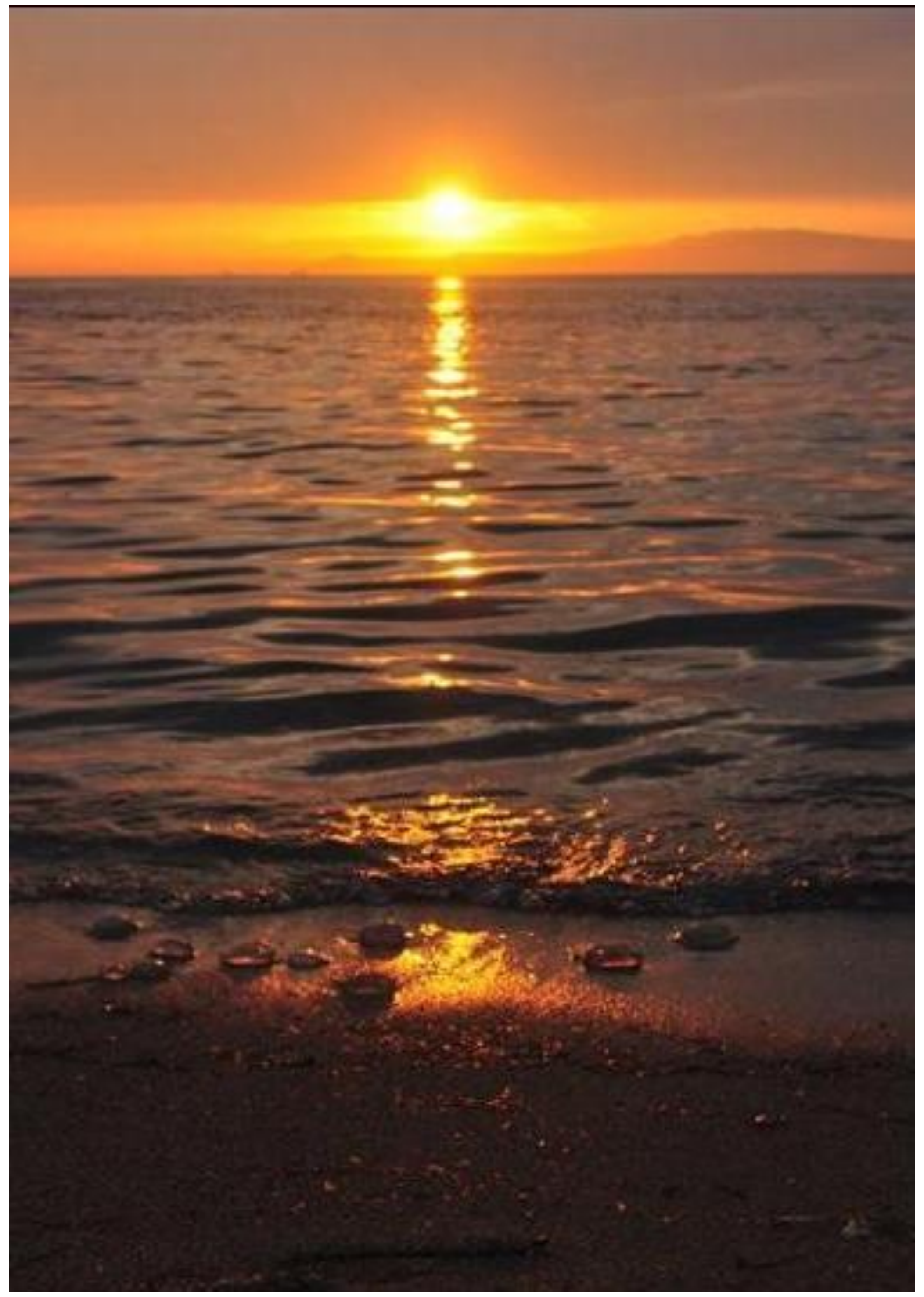


$\tilde{\theta}_T = \frac{\pi}{2} - \theta_T$

Reflexão e transmissão: Eqs. de Fresnel

- Como $\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}$, as exponenciais que aparecem nas condições de contorno são canceladas e podemos proceder com a aplicação das 4 condições de contorno.

- Embora a dinâmica das ondas transmitidas, refletidas e incidentes ocorra num único plano, a polarização dessas ondas não ocorre necessariamente no mesmo plano. Por isto, temos de dividir este problema em duas partes: **i)** polarização no plano de incidência e **ii)** polarização perpendicular ao plano de incidência. A solução geral é uma combinação linear desses casos. Para o caso i), encontramos as seguintes eqs. de **Fresnel**:



$$\tilde{E}_{0_R} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right) \tilde{E}_{0_I}, \quad \tilde{E}_{0_T} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta}\right) \tilde{E}_{0_I}$$

- Acima, $\alpha \equiv \dfrac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}$ e $\beta \equiv \dfrac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$. Para dados dois meios, β é fixo, mas α vai variar dependendo do ângulo de incidência.

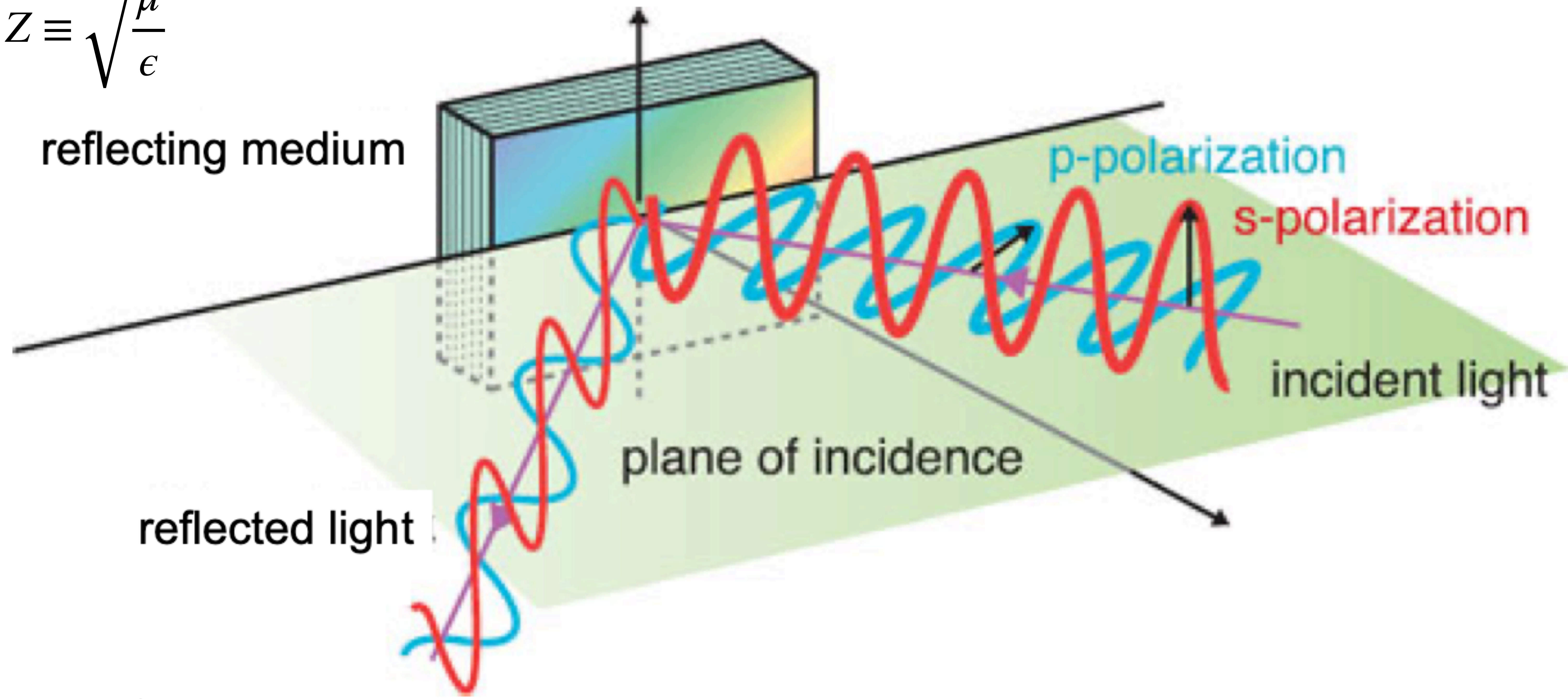
- Dois casos relevantes: a) $\theta_I \approx \pi/2 \Rightarrow \alpha \to \infty \Rightarrow E_{0_T} \to 0$ (reflexão total) e b) $\alpha = \beta \Rightarrow E_{0_R} = 0$ (transmissão total), ocorre quando $\theta_I = \theta_B$ (ângulo de Brewster).

Reflexão e transmissão: polarizações p e s

$$Z \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$r_p \equiv \left[\frac{E_R}{E_I}\right]_p = \frac{Z_1\cos\theta_1 - Z_2\cos\theta_2}{Z_1\cos\theta_1 + Z_2\cos\theta_2}$$

$$r_s \equiv \left[\frac{E_R}{E_I}\right]_s = \frac{Z_2\cos\theta_1 - Z_1\cos\theta_2}{Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2}$$



Índices de reflexão das eqs. de Fresnel para polarização p e s.

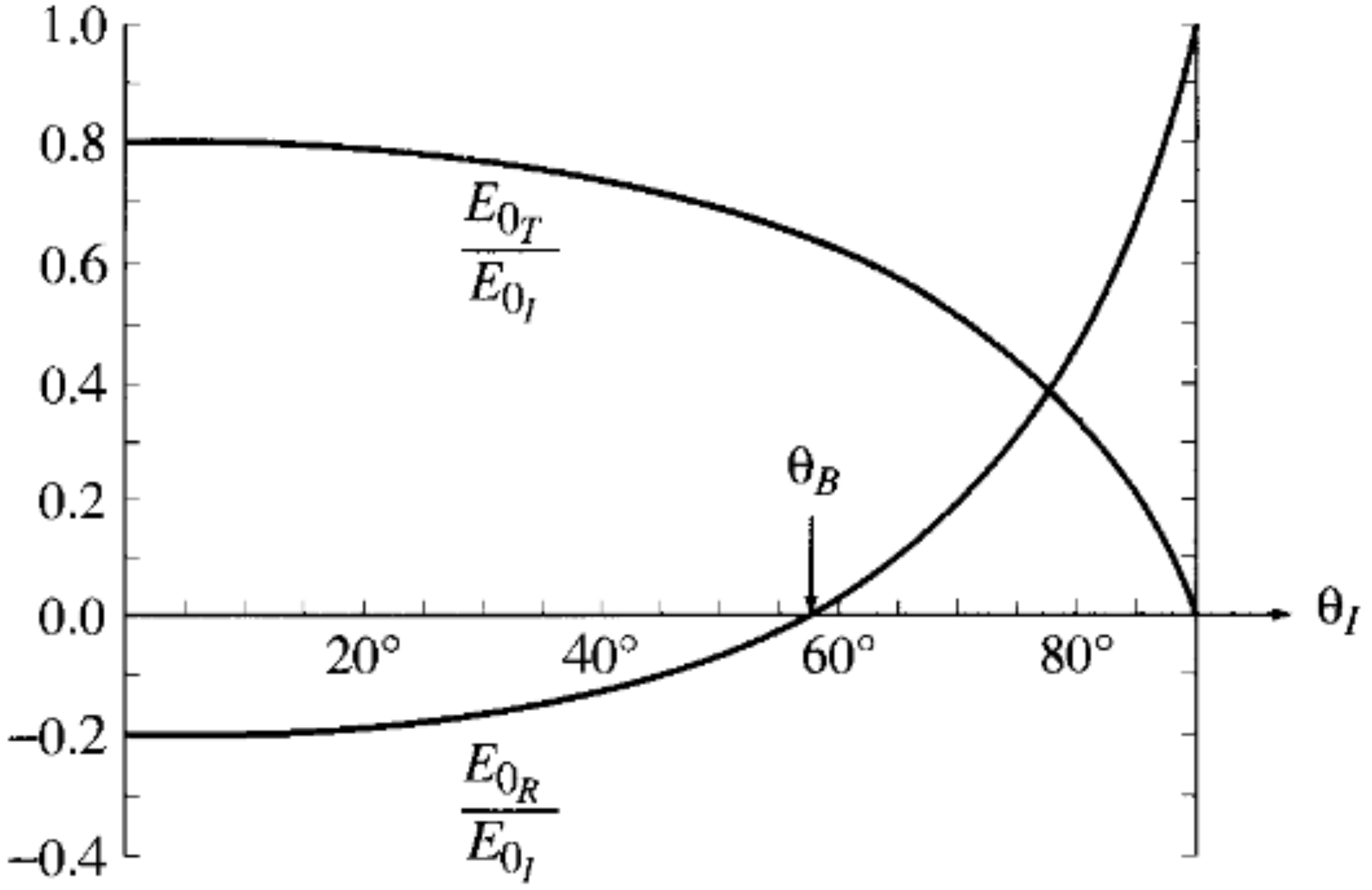
Assim como a polarização p permite a def. do ângulo de Brewster θ_B,

em que não há onda refletida, o mesmo ocorre com a polarização s, que leva ao θ_E. Contudo, para $\mu_1 \approx \mu_2$:

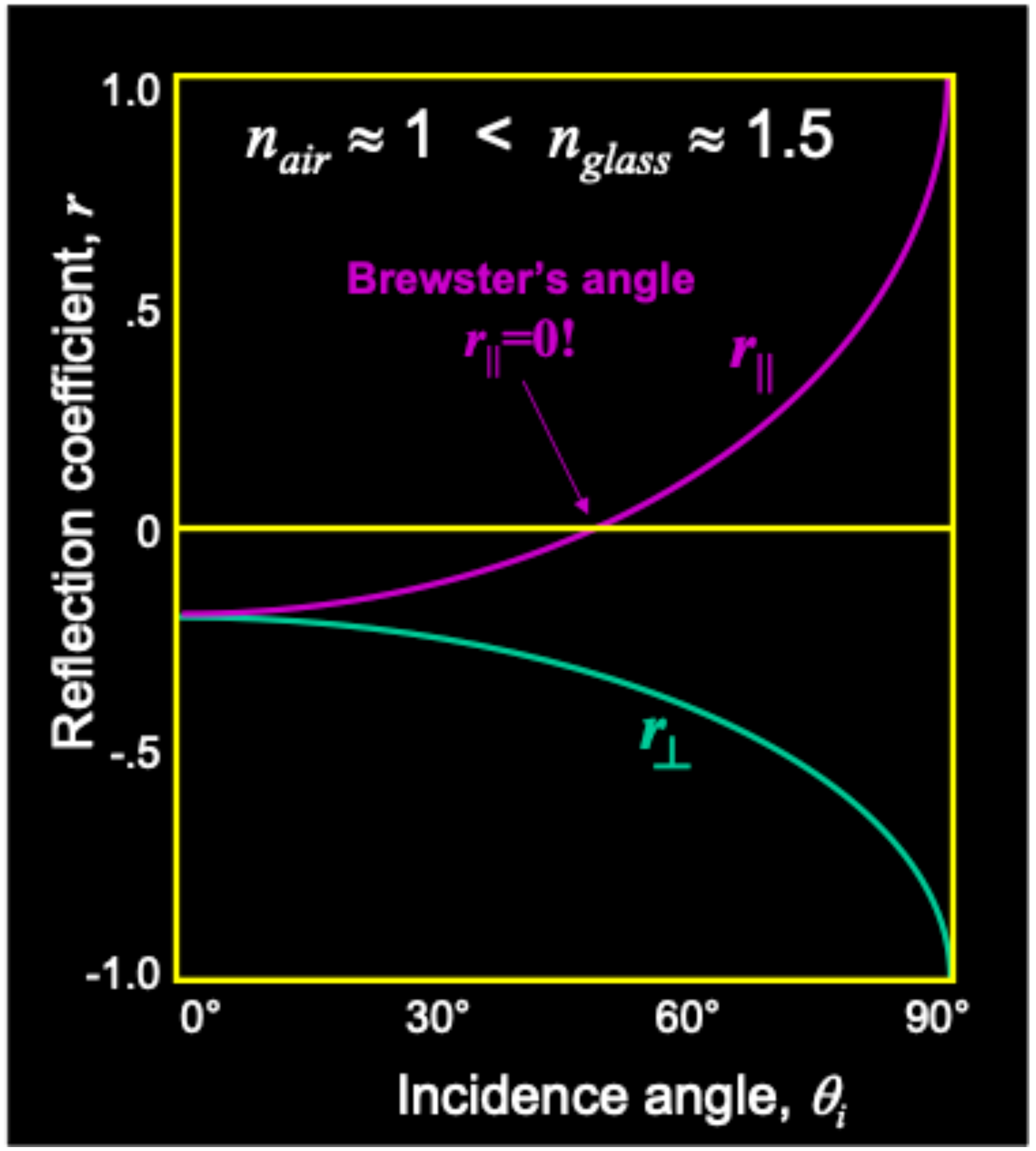
$$\tan^2\theta_E = -1 \qquad \text{and} \qquad \tan^2\theta_B = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.$$

Mais detalhes em Zangwill.

Reflexão e transmissão: Produção de ondas polarizadas



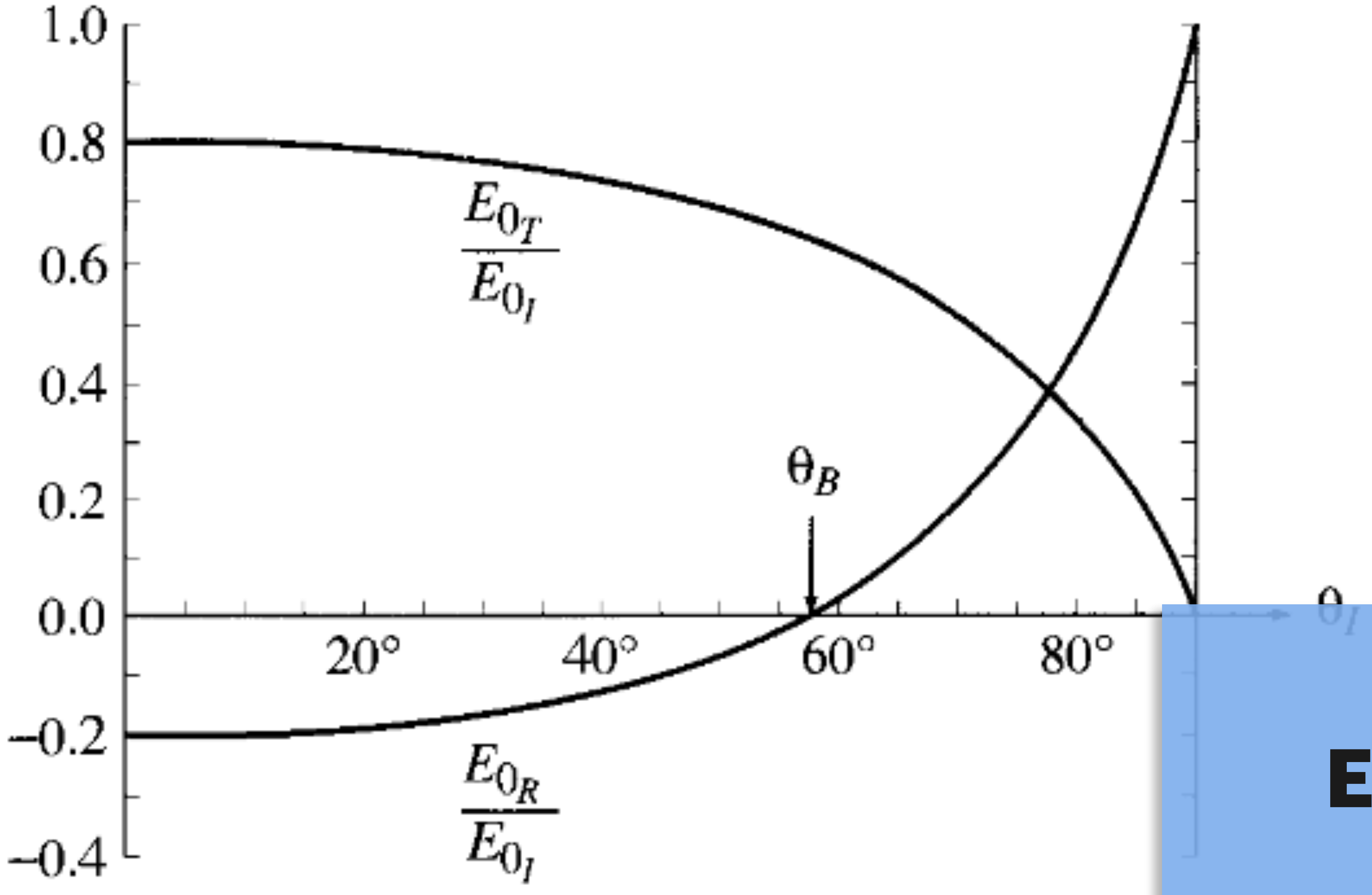
Índices de transmissão e reflexão para polarização no plano ("polarização p").



Assim, quando $\theta_I = \theta_B$, ondas não polarizadas são refletidas com polarização s, dado que a reflexão da da polarização p é nula.

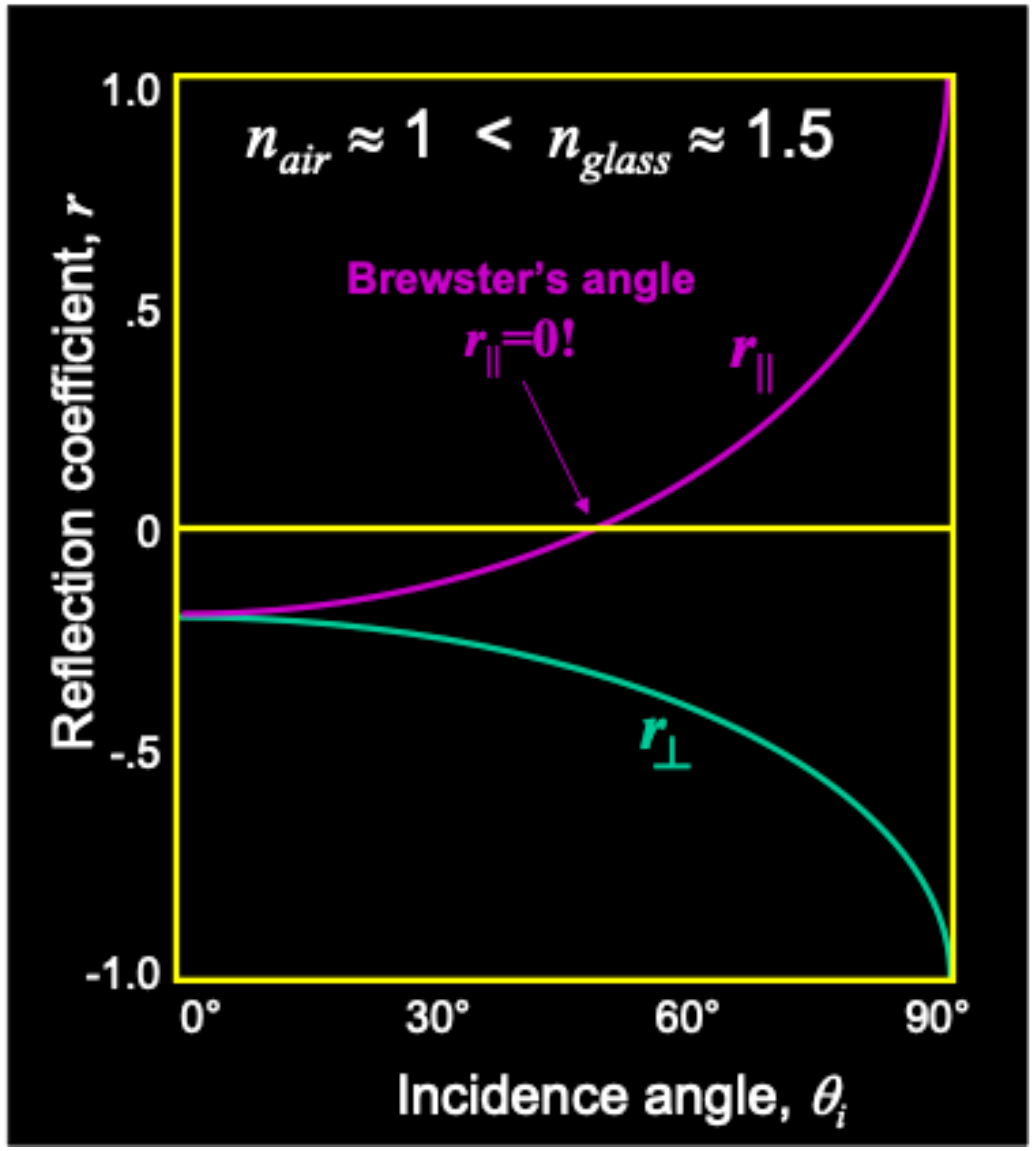
Índices de reflexão para as polarizações p e s, acima denotadas por || e ⊥.

Reflexão e transmissão: Produção de ondas polarizadas



Exercicios: 9.15 e 9.16

Índices de transmissão e reflexão para polarização no plano ("polarização p").



Assim, quando $\theta_I = \theta_B$, ondas não polarizadas são refletidas com polarização s, dado que a reflexão da da polarização p é nula.

Índices de reflexão para as polarizações p e s, acima denotadas por || e ⊥.

Reflexão e transmissão: Condutores

- Para condutores, devemos usar as equações de Maxwell sem suprimir os termos de cargas livres, ou seja

$$\text{(i)}\ \nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\epsilon}\rho_f, \quad \text{(iii)}\ \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{(ii)}\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0, \quad \text{(iv)}\ \nabla\times\mathbf{B}=\mu\sigma\mathbf{E}+\mu\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

- **Exercício:** Mostre que não há onda transmitida dentro de um condutor (ela decai exponencialmente). Note que consequentemente isso implica que um condutor perfeito reflete toda luz incidente., ou seja, são ótimos espelhos desde que tenham superfície plana.

- O resultado acima sobre reflexão pode ser verificado diretamente, usando condições de contorno adequadas para condutores , ou seja, que incluam dependência em cargas livres. A conclusão, como já adiantada, é

$$\tilde{E}_{0_R}=-\tilde{E}_{0_I}, \quad \tilde{E}_{0_T}=0.$$