Teoria Eletromagnética II

Parte 3 -Campos & Potenciais
(capítulo 10)

Prof. Davi C. Rodrigues
Período 2020/2 (EARTE)
Março-Abril/2021

Introdução

- Nesta Parte 3 da disciplina vamos abordar de forma aprofundada a teoria de potenciais para a eletrodinâmica, teoria de calibre e passaremos a avaliar em detalhes o tempo de propagação de sinais eletromagnéticos.
- Até então, calculamos o campo elétrico num ponto espacial e num tempo a partir de uma distribuição de cargas no mesmo tempo. Na eletrodinâmica, se você pensar bem, isso nem sempre faz sentido, pois o campo elétrico num ponto não deve conter informação de como a carga está neste instante, mas sim num instante anterior. Isto pois tem de passar um tempo para o campo gerado pela carga chegar até o ponto desejado. Essas observações nos levarão às equações de Jefimenko e aos potenciais de Liénard-Wiechert. Tudo isso corresponde ao Capítulo 10.
- O capítulo 10 dá a base necessário para tratarmos como a matéria pode gerar e absorver ondas eletromagnéticas. E isso veremos no Cap. 11.

Potencial vetorial

- As eq's de Maxwell completas são

$$\text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \qquad \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ em todo o espaço, podemos introduzir um campo vetorial $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

- Isto não é novidade, mas é bom lembrar da justificativa. Uma forma de justificar é pelo teorema de Helmoltz. Neste caso, usa-se que $\mathbf{B}$ vai para zero no infinito espacial.
- Para o resultado isoladamente acima, tem uma forma simples de demonstrar que não depende do teorema de Helmholtz.

Breve demonstração de que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{A} \mid \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

- A ideia é mostrar que para qualquer $\mathbf{B}$ podemos sempre construir um $\mathbf{A}$ tal que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Podemos escolher um $\mathbf{A}$ com várias particularidades, desde que seja possível gerar qualquer $\mathbf{B}$.

- Seguindo a construção do livro do Zangwill, seja $\mathbf{A}$ escrito em coordenadas cartesianas com

$$A_x = \int B_y \, dz \,, \; A_y = -\int B_x \, dz \quad \text{e} \quad A_z = A_z(z) \,.$$

  Essas integrais acima são indefinidas. Qualquer que seja $\mathbf{B}$, sempre podemos escrever as expressões anteriores.

- Agora, calcule $\nabla \times \mathbf{A}$ e, usando que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, você encontrará $\mathbf{B}$ como resposta.

Extensão de $\mathbf{E} = -\nabla V$ para a eletrodinâmica

- Na eletrostática usa-se que $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, que por sua implica que $\mathbf{E} = -\nabla V$. Na eletrodinâmica é evidente que $\mathbf{E} = -\nabla V$ não pode ser verdadeiro pois $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$.
- Usando o potencial vetorial na lei de Faraday, temos

$$\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}.$$

- Portanto,

$$\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} = -\nabla V,$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \dot{\mathbf{A}}.$$

Extensão de $\mathbf{E} = -\nabla V$ para a eletrodinâmica

- Na eletrostática usa-se que $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, que por sua implica que $\mathbf{E} = -\nabla V$. Na eletrodinâmica é evidente que $\mathbf{E} = -\nabla V$ não pode ser verdadeiro pois $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$.
- Usando o potencial vetorial na lei de Faraday, temos

$$\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}.$$

- Portanto,

$$\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} = -\nabla V,$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \dot{\mathbf{A}}.}$$

Equações de Maxwell em função de V e $\mathbf{A}$

- Podemos agora interpretar as equações de Maxwell de outra forma. Ao invés de serem equações para $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$, podemos vê-las como equações para V e $\mathbf{A}$.

- Considere as seguintes definições: $\mathbf{E} \equiv -\nabla V - \dot{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$.
Com estas, as equações de Maxwell que não dependem de fontes são trivialmente satisfeitas. Verifique diretamente!

- As equações que contém as fontes são agora escritas da seguinte forma (**Verifique!**):

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- Note que agora, ao invés de 4 equações (duas escalares e 2 vetoriais), temos duas equações (uma vetorial e outra escalar) e duas incógnitas (um campo escalar e um campo vetorial).

Equações de Maxwell em função de V e $\mathbf{A}$

- Podemos agora interpretar as equações de Maxwell de outra forma. Ao invés de serem equações para $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$, podemos vê-las como equações para V e $\mathbf{A}$.

- Considere as seguintes definições: $\mathbf{E} \equiv -\nabla V - \dot{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$.
Com estas, as equações de Maxwell que não dependem de fontes são trivialmente satisfeitas. Verifique diretamente!

Exercício: 10.1

- As equações que contém as fontes são agora escritas da seguinte forma (**Verifique!**):

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- Note que agora, ao invés de 4 equações (duas escalares e 2 vetoriais), temos duas equações (uma vetorial e outra escalar) e duas incógnitas (um campo escalar e um campo vetorial).

Transformações de calibre

- As duas equações para $\mathbf{A}$ e V , junto do conhecimento das fontes ρ e $\mathbf{J}$ e das condições de contorno não são suficinetesp para determinar $\mathbf{A}$ e V de forma única. Já sabemos disso, vamos agora descobrir que ambiguidade é essa de forma explícita.

- Sejam $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}$ e $V' = V + \beta$, em que $\mathbf{A}$ e V são soluções das eq's de Maxwell (para dadas fontes de condições de contorno mantidas fixas).

- Se não houvesse ambiguidade, as únicas possíveis soluções para $\boldsymbol{\alpha}$ e β seriam $\mathbf{0}$ e 0. Veremos que não é assim.

Sabemos que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são observáveis.

Que mudanças podemos fazer em $\vec{A}$ e V, na eletrodinâmica, tais que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não mudem?

Sejam $\vec{A}$ e V tais que:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{e} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \dot{\vec{A}}}$$

E sejam

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha} \quad \text{e} \quad V' = V + \beta,$$

em que $\vec{A}'$ e V' levam aos mesmos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Portanto, $\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{B}$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{\alpha} = \vec{0}$$

$$\therefore \underline{\vec{\alpha} = \vec{\nabla} \lambda}$$

Também temos que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V' - \dot{\vec{A}}'$$

$$\therefore \vec{0} = -\vec{\nabla} \beta - \vec{\nabla} \dot{\lambda}$$

$$\therefore \underline{\beta = -\dot{\lambda}} \qquad (\text{A menos de } f(t))$$

Em conclusão, a transformação local

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda$$
$$V \to V - \dot{\lambda} \quad ,$$

não altera $\vec{B}$ e $\vec{E}$. Consequentemente, não altera nada que possa ser observado.

Uma transformação continua nos campos que descrevem uma teoria e que.não altera a física é chamada de <u>transformação de calibre</u>.

Exercício:

Mostre que as transformações de calibre encontradas não alteram as eqs de Maxwell escritas em função dos potenciais.

Vimos que

$$\begin{cases} \nabla^2 V + \vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box \vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{V}\right) = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Fazendo $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}$ e $V \to V' = V + \beta$,

$$\begin{cases} \nabla^2 \beta + \vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{\alpha}} = 0 & \text{i} \\ \Box \vec{\alpha} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha} + \frac{1}{c^2}\dot{\beta}\right) = \vec{0} & \text{ii} \end{cases}$$

Substituindo as sol's de $\vec{\alpha}$ e β:
$\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\lambda$ e $\beta = -\dot{\lambda}$ vem

i $\Rightarrow -\nabla^2\dot{\lambda} + \nabla^2\dot{\lambda} = 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

ii $\Rightarrow \Box\vec{\nabla}\lambda - \vec{\nabla}\left(\nabla^2\lambda - \frac{1}{c^2}\ddot{\lambda}\right) = \vec{0}$

$\therefore \Box\vec{\nabla}\lambda - \vec{\nabla}\Box\lambda = \vec{0}$

$\therefore \vec{0} = \vec{0}$ ✓

As transf's de calibre, como esperado, não alteram as eqs de Maxwell

$$\Box \equiv -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

Fixação de Calibre

- Vimos que a eletrodinâmica possui simetria de calibre (equivalentemente, possui transformações de calibre). Muitas vezes é conveniente fixar tal simetria para simplificar algum cálculo ou procedimento.
- Em detalhes, uma fixação de calibre deve:
  - i) ser acessível via transformação de calibre.

    Ou seja, deve existir uma transformação de calibre que leve uma solução qualquer da dinâmica em uma que satisfaça as condições impostas pela fixação.

    Isto garante que a fixação não terá impacto físico.
  - ii) eliminar a possibilidade de nova transformação

    Feita a fixação, não deve mais haver simetria de calibre remanescente.
    Há casos de interesse me que há uma simetria residual, nesses casos fala-se de uma fixação parcial.
- Curiosidade: “calibre" (ou *gauge*) é um jargão. Esse nome foi introduzido por Hermann Weyl para uma outra teoria (já descartada) e mais tarde notou-se a importância do conceito em diversas áreas.

Calibre de Coulomb

- O calibre de Coulomb é definido pela condição

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

- **Exercício (feito no próximo slide):** Demonstre que a condição acima realmente fixa o calibre.
- **Exercício:** Verifique se as condições a seguir são acessíveis e, se forem, se são suficientes par eliminar as transformações de calibre da eletrodinâmica:

  i) $V = 0$;

  ii) $A_x = 0$;

  iii) $V = 0$ e $A_x = 0$;

  iv) $A_x = A_y$;

  v) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$;

  vi) $|\mathbf{A}| = V$;

  vii) $\mathbf{A} = \nabla V$;

  viii) $\nabla \cdot \mathbf{A} = V = 0.$

Calibre de Coulomb

Exercício: Verifique que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ é uma escolha válida para fixar o calibre.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$$

Seja $\vec{A}$ uma solução qualquer das Eq's de Maxwell.

$$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\lambda$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A}'=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\nabla^2\lambda$$

Vamos escolher λ tal que

$$\nabla^2\lambda=-\vec{\nabla}\cdot\vec{A}.$$

Esta é uma eq. de Poisson. Sabemos que fixadas as condições de contorno $\exists$ solução para λ e é única.

Logo concluímos que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ constitui uma escolha válida de calibre.

12

Exercício: Verifique que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ é uma escolha válida para fixar o calibre.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

Seja $\vec{A}$ uma solução qualquer das Eq's de Maxwell.

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$

$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2\lambda$

Vamos escolher λ tal que

$$\nabla^2\lambda = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}.$$

Esta é uma eq. de Poisson. Sabemos que fixadas as condições de contorno $\exists$ solução para λ e é única.

Logo concluímos que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ constitui uma escolha válida de calibre.

Calibre de Coulomb

Para encontrar as eq's de Maxwell no calibre de Coulomb, basta re-escrever essas eq's em função dos potenciais e usar $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$. Ou seja,

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho\,,$$

$$\Box\,\mathbf{A} - \frac{1}{c}\nabla\dot{V} = -\,\mu_0\mathbf{J}\,.$$

Consequentemente, a solução para V é especialmente simples:

Calibre de Coulomb

Exercício: Verifique que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ é uma escolha válida para fixar o calibre.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

Seja $\vec{A}$ uma solução qualquer das Eq's de Maxwell.

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$

$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2\lambda$

Vamos escolher λ tal que

$\nabla^2\lambda = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$.

Esta é uma eq. de Poisson. Sabemos que fixadas as condições de contorno $\exists$ solução para λ e é única.

Logo concluímos que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ constitui uma escolha válida de calibre.

Para encontrar as eq's de Maxwell no calibre de Coulomb, basta re-escrever essas eq's em função dos potenciais e usar $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$. Ou seja,

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho\,,$$

$$\Box\mathbf{A} - \frac{1}{c}\nabla\dot{V} = -\mu_0\mathbf{J}\,.$$

Consequentemente, a solução para V é especialmente simples:

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\tau'\,.$$

Calibre de Coulomb

- A solução do potencial vetor neste calibre não é particularmente simples, mas ao menos o potencial escalar tem solução simples. Lembremos que:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' .$$

- Qualquer alteração em ρ num instante t gera um instantâneo efeito em $V(\mathbf{r}, t)$. Este é um efeito do calibre de Coulomb. Não tem nada de físico nisso, ou melhor, esse efeito não pode ser medido (pois V não é um observável).
- Este calibre em geral é uma má escolha para estudar fenômenos relativísticos. Ele não é errado, mas a simplicidade adquirida para cálculo de V não compensa nesse contexto.
- É importante lembrar que V sozinho não é suficiente para encontrar $\mathbf{E}$ na eletrodinâmica.
- No calibre de Coulomb e suficientemente longe de qualquer carga, pode-se usar $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e $V = 0$. Concorda com isso?

Calibre de Lorenz

- Este calibre é definido pela codição

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\dot{V}.$$

- **Exercício (feito):** Verifique que a condição acima realmente é uma fixação de calibre.
- Nesse calibre, as eq's de Maxwell são dadas por

$$\Box V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \,,$$

$$\Box \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \,.$$

Calibre de Lorenz

- Este calibre é definido pela codição

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\dot{V}.$$

- **Exercício (feito):** Verifique que a condição acima realmente é uma fixação de calibre.
- Nesse calibre, as eq's de Maxwell são dadas por

$$\Box V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho\,,$$

$$\Box \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}\,.$$

- Muito elegante, não? São duas equações de ondas, de velocidade c, e com fontes ρ e $\mathbf{J}$.
- Vale ressaltar que toda a dinâmica das equações de Maxwell estão contidas nessas duas equações.

Verificação do calibre de Lorenz (ou Lorentz)

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$
$V' = V - \dot{\lambda}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = -\frac{1}{c^2}\dot{V}' \Rightarrow \nabla^2\lambda = +\frac{1}{c^2}\ddot{\lambda}$$

$\therefore$ Esta condição é acessível, pois qualquer solução da eq.

$$\Box\lambda = 0$$

satisfaz essa condição.

Contudo, o "calibre" de Lorentz não é uma verdadeira fixação de calibre, pois há uma simetria residual!

Seja λ tal que $\Box\lambda = 0$. – Note que há infinitas soluções não triviais para λ. Por exemplo, $\lambda = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ com $\omega = |k|c$

Logo podemos ainda alterar $\vec{A}'$ e V'; não estão fixos.

Em geral, não é possível escolher $V' = 0$ nesse calibre, pois isto requer $V = -\dot{\lambda}$. Isto só será possível se $\Box V = 0$, o que não é necessariamente válido. – Lembrar que em princípio, V é função arbitrária.

Embora rigorosamente o calibre de Lorentz não fixe completamente a simetria, e logo trate-se de fixação parcial, é comum chamá-lo de fixação de calibre.

Este calibre será essencial de agora em diante.

Calibre de Lorenz ou de Lorentz se refere a esse mesmo calibre. Historicamente, o correto é Lorenz, mas em dado momento surgiu alguma confusão com os nomes e o nome de Lorentz foi erroneamente associado a este calibre.

Soluções de A e V no calibre de Lorenz

- Neste calibre, como visto, as equações de Maxwell são duas EDP's não acopladas:

$$\Box V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho\,, \qquad \Box \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}\,.$$

- Dado que são equações diferenciais lineares, a solução geral para **A** ou V tem a forma

$$X = X_h + X_p.$$

- Em que X_h é solução de $\Box X_h = 0$ e X_p se refere à solução particular: $\Box X_p = -\rho$ e $\Box X_p \neq 0$.
- A solução da parte homogênea já sabemos, é qualquer onda com velocidade c, ou seja,

$$X_h = X_h(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm \omega t), \text{ com } \omega = kc.$$

- Mas como encontrar a solução da parte particular?
- Vou primeiro dar a resposta e depois ensinar como encontrá-la.

Soluções de A e V e tempo retardado

- As soluções são

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau',$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'.$$

$$\boxed{t_r \equiv t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}}$$

- Ao contrário da solução de Coulomb para V, ρ depende de outro tempo, não é t, é o chamado *tempo retardado* t_r .

- Neste calibre, V e $\mathbf{A}$ em dado ponto e no tempo t dependem da distribuição de carga e corrente num tempo *anterior* (t_r) e esse é o tempo que a luz leva para percorrer da distribuição de carga até o ponto de observação.

- **Exercício (feito no livro):** Verifique diretamente que as expressões acima realmente são soluções das equações diferenciais correspondentes.

Tempo avançado

- Curiosamente, o seguinte caso também é solução das mesmas equações:

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_a)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau' ,$$

$$\boxed{t_a \equiv t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t_a)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau' .$$

- Acima, t_a é o *tempo avançado*. Note que $t_r < t < t_a$.
- É fato que as equações acima são soluções, mas são soluções um tanto estranhas. Isto pois, para saber a solução dos potenciais em t, precisamos saber das cargas e correntes em num instante posterior $t_a > t$! Não iremos usar esse tempo, podemos fazer tudo com t_r.
- O livro do Griffiths fala que o tempo avançado implica em **violação de causalidade**. Não é rara essa interpretação, mas eu não vejo assim. O tempo avançado não é comumente útil para o tipo de problema que queremos fazer. Ver também Zangwill, p. 723.

Dedução das soluções via função de Green

- Nos próximos slides apresento uma dedução em detalhes dessas soluções usando a técnica das funções de Green.

- Para este ponto, gostei da abordagem do Zangwill, mas abri mais os detalhes.

- Estas contas ficaram por fim mais extensas do que esperava, mas entendo que ajudam o aluno a tanto entender como obter as soluções desejadas (que advém de equações que são encontradas em vários contextos, i.e. equações de onda com fontes) e também a como começar a manipular essas expressões que envolvem tempo retardado.

Queremos resolver um problema como

$$\Box \psi(\vec{r},t) = -\rho(\vec{r},t)$$

Para o caso independente do tempo,

$$\nabla^2 \psi = -\rho$$

Função de Green

$$\psi(\vec{r}) = -\int G(\vec{r},\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')\,d\tau'$$

Em que

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$$

Para facilitar a resolução, é melhor primeiro tratar do caso $\vec{r}'=0$ (a generalização é fácil).

Neste caso,

$$\nabla^2 G(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r}).$$

Podemos simplificar mais notando que G não pode depender de θ ou φ, só pode depender de r (consequência da simetria esférica).

$$\therefore \nabla^2 G(r) = \delta^{(3)}(\vec{r})$$

A solução é imediata, dado que

$$\nabla^2(1/r) = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}).$$

Assim,

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$$

$$\therefore G(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\therefore \psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d\tau'$$

Agora voltemos para o caso de interesse:

$$\Box \psi = -\rho$$

A função de Green deve satisfazer

$$\Box G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$$

Simplificando, como antes feito, temos

$$\Box G(r,t) = \delta^{(3)}(\vec{r})\,\delta(t).$$

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 \partial_r G\right) = \frac{1}{r^2}\left(r^2\partial_r^2 G + 2r\partial_r G\right)$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r^2 (rG) = \frac{1}{r}\left(r\partial_r^2 G + 2\partial_r G\right)$$

$$\therefore \quad \Box G = \frac{1}{r}\left(\partial_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)(rG) \quad (\star)$$

Para $r>0$, temos $\Box G = 0$

Como G é função de r e t somente, e usando eq. $(\star)$, podemos escrever

$$r G_\pm = f(r \pm ct), \; f \text{ é função arbitrária}$$

$$\therefore \; G_\pm = \frac{1}{r} f(r \pm ct) \quad \text{para } r>0.$$

Vamos usar este caso acima como um ansatz para a solução completa de $G_\pm$.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G_\pm = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\left(\frac{1}{r} f(r \pm ct)\right)$$

$$\nabla^2\left[\frac{1}{r} f(r \pm ct)\right] = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})\, f(r \pm ct) +$$

$$+ \frac{\nabla^2 f(r \pm ct)}{r} + 2\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\cdot \vec{\nabla} f(r \pm ct) =$$

21

$$= -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})f(r\pm ct) + \frac{f''(r\pm ct)}{r} + 2\frac{f'(r\pm ct)}{r^2} - 2\frac{1}{r^2}f'(r\pm ct)$$

$$= -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})f(r\pm ct) + \frac{f''(r\pm ct)}{r}$$

$$\therefore \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\phi_\pm = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})f(r\pm ct) + \frac{f''(r\pm ct)}{r} - \frac{1}{c^2}c^2\frac{f''(r\pm ct)}{r}$$

$$\therefore \Box\phi_\pm = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})f(r\pm ct)$$

Ou seja, a fim de satisfazermos

$$\Box\phi = \delta^{(3)}(\vec{r})\delta(t),$$

precisamos que

$$\delta^{(3)}(\vec{r})\delta(t) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})f(r\pm ct)$$

Não podemos "cortar" as deltas de ambos os lados, isso é falso em geral. Mas note que

$$\delta^{(3)}(\vec{r})f(r\pm ct) = \delta^{(3)}(\vec{r})f(\pm ct)$$

Logo, o que precisamos é

$$f(r\pm ct) = -\frac{1}{4\pi}k\delta(r\pm ct)$$

Em que k é constante a ser determinada.

Como $\delta(\pm ct) = \frac{1}{c}\delta(t)$ $(c>0)$, temos $k = c$ e obtemos

$$f(r\pm ct) = -\frac{1}{4\pi}c\,\delta(r\pm ct)$$

Em conclusão, encontramos que

$$G_\pm = \frac{1}{r} f(r \pm ct)$$

$$\therefore G_\pm = -\frac{1}{4\pi r} c\,\delta(r \pm ct)$$

Exercício: verifique se a dimensão de $G_\pm$ está correta considerando sua definição.

Equivalentemente, podemos usar

$$G_\pm = -\frac{1}{4\pi r} \delta(t \pm r/c)$$

Por fim, transladando r e t, temos a resposta final

$$G_\pm(\vec{r},t|\vec{r}',t') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left(t - t' \pm \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$$

Agora, que encontramos G, podemos voltar para a eq. diferencial original

$$\Box \psi = -\rho$$

$$\therefore \psi_p(\vec{r},t) = -\int G(\vec{r},t|\vec{r}',t')\, \rho(\vec{r}',t')\, d\tau' dt'$$

A sol. geral de ψ é $\psi = \psi_p + \psi_h$, em que ψ_h é solução da parte homogênea, $\Box \psi_h = 0$.

$$\therefore \psi_p(\vec{r},t) = +\frac{1}{4\pi}\int \frac{\delta(t-t' \pm |\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rho(\vec{r}',t')\, d\tau' dt'$$

$$\therefore \psi_p(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\vec{r}',t_\pm)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\tau',$$

em que $t_\pm \equiv t \pm \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$.

t_+ é chamado de tempo adiantado.

$\boxed{t_- \equiv t_r \text{ é o tempo retardado.}}$

Exercício: Verifique diretamente que

i) $\Box G_{\pm}(\vec{r},t) = \delta^{(3)}(\vec{r})\,\delta(t)$

ii) $\Box \psi_p = -\rho$

Dica: a questão i pode ser usada na ii.

Exemplo: fio infinito

- Considere um fio em linha reta e infinito. Uma corrente é ligada instantaneamente em $t = 0$. Desejamos encontrar os campos elétrico e magnético induzidos.

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t \leq 0, \\ I_0, & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

- Sabemos que:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}d\tau' \quad \text{e} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}d\tau' \ .$$

- Como o fio é eletricamente neutro, temos $V = 0$.

- Sendo z a coordenada ao longo do fio, s a coordenada radial cilíndrica, temos:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}', t_r)\delta_\perp^{(2)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}s'ds'dz'd\theta' ,$$

com $\delta_\perp^{(2)} = \frac{1}{s'}\delta(s')\,\delta(\theta')$. Logo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{\mathbf{z}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}dz'.$$

Breve observação: Delta de Dirac em coordenadas polares e outras

Considerando que a região de integração incluia a origem ($\vec{r} = \vec{0}$), temos

$$\int \delta^{(2)}(\vec{r})\, d^2x = \int \delta(x)\,\delta(y)\, dx\, dy = 1$$

$$\int \delta^{(3)}(\vec{r})\, d^3x = \int \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\, dx\, dy\, dz = 1$$

Para coordenadas polares e cilíndricas,

$$\int \delta^{(2)}(\vec{r})\, \underbrace{s\, ds\, d\theta}_{= d^2x} = 1 \, ,$$

a igualdade se deve pois só mudamos o sistema de coordenadas.

Note que $\delta^{(2)}(\vec{r}) \neq \delta(s)\,\delta(\theta)$ (sequer tem a dimensão correta).

Mas notem que $\delta^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{s}\delta(s)\,\delta(\theta)$ funciona! Pois,

$$\int \frac{1}{s}\delta(r)\,\delta(\theta)\, s\, ds\, d\theta = \int \delta(r)\,\delta(\theta)\, ds\, d\theta = 1$$

Entendido o caso acima pode-se concluir que para coordenadas cilíndricas e esféricas, temos:

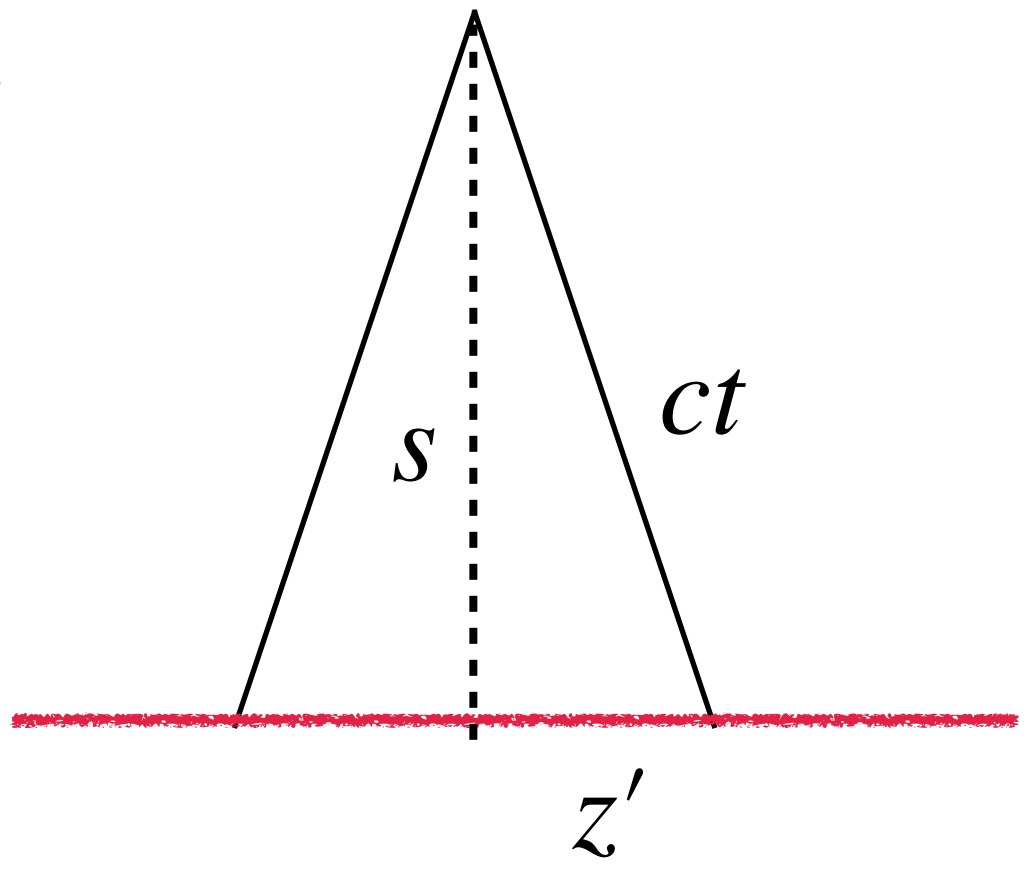
$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \frac{1}{s}\delta(s)\,\delta(\theta)\,\delta(z)$$

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\delta(r)\,\delta(\theta)\,\delta(\phi)$$

Exemplo: fio infinito — Continuação

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{\mathbf{z}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dz', \quad \text{com } t_r = t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c\,.$$

- Para $t<0$ o integrando é sempre nulo. E, para $t>0$, haverá valores de z' suficientemente grandes tais que $I=0$. Em geral, a corrente será sempre nula quando $t_r<0$.



- $t_r>0$ requer $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct$, logo $z'^2<|c^2t^2-s^2|$. E portanto temos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\hat{\mathbf{z}}\int_0^{\sqrt{c^2t^2-s^2}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dz' = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\hat{\mathbf{z}}\ln\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-s^2}}{s}\,.$$

- Como agora os potenciais são conhecidos, podemos calcular

$$\mathbf{E}(s,t) = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi\sqrt{(ct)^2-s^2}}\hat{\mathbf{z}},\qquad \mathbf{B}(s,t) = \nabla\times\mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s}\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2-s^2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Equações de Jefimenko

- Estas são as soluções para **E** e **B** na forma integral. Já sabemos calcular V e **A** (no calibre de Lorenz, por exemplo), logo só o que é necessário é derivá-los para encontrar **E** e **B**.
- Sabendo que

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

- Encontramos que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}^2} \hat{\mathscr{r}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', t_r)}{c\mathscr{r}} \hat{\mathscr{r}} - \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2\mathscr{r}} \right] d\tau' \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c\mathscr{r}} \right] \times \hat{\mathscr{r}}\, d\tau'$$

- **Exercício:** Encontre as soluções acima. Em princípio é só calcular derivadas, mas note que o tempo retardado torna as derivadas espaciais um pouco mais complicadas. Os detalhes estão no livro.
- **Exercícios:** Problemas 10.11 e 10.12.

Equações de Jefimenko

- Estas são as soluções para **E** e **B** na forma integral. Já sabemos calcular V e **A** (no calibre de Lorenz, por exemplo), logo só o que é necessário é derivá-los para encontrar **E** e **B**.
- Sabendo que

Notem que estes novos termos decaem mais lentamente do que $1/r^2$.

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

- Encontramos que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}^2} \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', t_r)}{c\mathscr{r}} \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2 \mathscr{r}} \right] d\tau' \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c\mathscr{r}} \right] \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\, d\tau'$$

- **Exercício:** Encontre as soluções acima. Em princípio é só calcular derivadas, mas note que o tempo retardado torna as derivadas espaciais um pouco mais complicadas. Os detalhes estão no livro.
- **Exercícios:** Problemas 10.11 e 10.12.

Potenciais de Liénard-Wiechert

- Esses potenciais são os potenciais $\mathbf{A}$ e V de uma carga pontual (no calibre de Lorenz).
- Para encontrar os potenciais de uma carga pontual, em princípio basta usar deltas de Dirac nas soluções integrais que já temos. E é isso o que vamos fazer (tal como o livro do Zangwill). O livro do Griffiths ignora o que já foi deduzido e faz tudo de novo para o caso do ponto e, em algumas passagens, usa argumentos (semi-)relativísticos e heurísticos que não acho claros, ao menos não antes de entender relatividade especial.
- Sabemos que $V(\mathbf{r}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \displaystyle\int \dfrac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$.
- Uma carga q que se encontra num ponto $\mathbf{r}_0(t)$ possui ρ dado por $\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$.
- Logo $V(\mathbf{r}, t) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0} \displaystyle\int \dfrac{\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t_r))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$. Parece simples resolver isso, não?

Potenciais de Liénard-Wiechert

- Esses potenciais são os potenciais $\mathbf{A}$ e V de uma carga pontual (no calibre de Lorenz).
- Para encontrar os potenciais de uma carga pontual, em princípio basta usar deltas de Dirac nas soluções integrais que já temos. E é isso o que vamos fazer (tal como o livro do Zangwill). O livro do Griffiths ignora o que já foi deduzido e faz tudo de novo para o caso do ponto e, em algumas passagens, usa argumentos (semi-)relativísticos e heurísticos que não acho claros, ao menos não antes de entender relatividade especial.
- Sabemos que $V(\mathbf{r}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$.
- Uma carga q que se encontra num ponto $\mathbf{r}_0(t)$ possui ρ dado por $\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$.
- Logo $V(\mathbf{r}, t) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t_r))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$. Parece simples resolver isso, não?
- Há um problema... $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, logo $\mathbf{r}_0$ depende de $\mathbf{r}'$ e não sabemos a forma explícita da trajetória da partícula (a própria trajetória da partícula muda devido a efeitos eletromagnéticos).

Potenciais de Liénard-Wiechert

- Ao invés de tentar resolver essa delta diretamente, o que me parece inviável, vamos usar um truque interessante: vamos adicionar uma delta a mais no problema!
- $$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t_r))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t_r)\, d\tau' dt' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}\, dt'$$
- Parece melhor, não?
  Mas tem um problema ainda: ainda não dá para resolver a delta no tempo de forma imediata, isso devido a um problema semelhante ao anterior: $\mathbf{r}_0$ depende de t'.
- Contudo, tem uma propriedade da delta de Dirac que permite resolver para este caso (deixando a resposta em função da velocidade da partícula).

Intermezzo: duas propriedades da delta de Dirac

Seja k uma constante e $b>a$,

$$\int_a^b \delta(kx)\,dx = \int_{ka}^{kb} \delta(u)\,\frac{du}{k} = \begin{cases} 1/k, & \text{se } kb>0>ka \\ -1/k, & \text{se } ka>0>kb \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$/u = kx/$

$$\therefore \boxed{\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{|k|}}$$

Seja x_0 a única raiz de $f(x)$ com $f'(x_0) \neq 0$,

$$\therefore \delta(f(x)) = \delta(f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \dots)$$

$f(x_0)=0$

$$= \delta((x-x_0)f'(x_0) + \dots)$$

$\delta(x)$ só é sensível a x numa vizinhança infinitesimal de 0 e assumimos $f'(x_0) \neq 0$.

$$= \delta((x-x_0)f'(x_0))$$

$$= \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$$

$$\therefore \boxed{\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\,\delta(x-x_0)}$$

Potenciais de Liénard-Wiechert

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} dt'.$$

- Para aplicar a última propriedade, notemos que, desde que a partícula se mova com velocidade inferior à da luz, a função $f(t') = t' - t + \dfrac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}$ só possui uma raiz. — Argumente.
- Denotaremos a raiz de $f(t')$ por t_{rp}, logo $t_{rp} = t - \dfrac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{rp})|}{c}$.
- Nota-se que t_{rp} é o tempo retardado associado à partícula. Não seria errado usar t_r aqui também, pois é o tempo retardado, porém está em função da posição da partícula $\mathbf{r}_0$, ao invés de um ponto arbitrário de integração $\mathbf{r}'$.
- **Exercício:** Verifique que $\dfrac{df(t')}{dt'} = 1 - \dfrac{\mathbf{v}(t')}{c} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t')$, em que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\hat{\mathbf{n}}$.
- Logo, $\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|/c) = \dfrac{1}{|1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}/c|}\delta(t' - t_{rp})$

Potenciais de Liénard-Wiechert

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} dt'.$$

- Logo, $\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|/c) = \dfrac{1}{|1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}/c|}\delta(t' - t_{rp})$ e temos:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \frac{1}{1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}/c} \right]_{t_{rp}}.$$

- Repetindo passos análogos, encontramos também o potencial $\mathbf{A}$:

- $$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{q\mathbf{v}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})/c} \right]_{t_{rp}}$$

- Estes acima são os potenciais de Liénard-Wiechert.

Potenciais de Liénard-Wiechert

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(t'-t+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}\,dt'.$$

- Logo, $\delta(t'-t+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|/c) = \dfrac{1}{|1-\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}/c|}\delta(t'-t_{rp})$ e temos:

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\frac{1}{1-\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}/c}\right]_{t_{rp}}.$$

Além da correção do tempo retardado, há essa correção relativística.

- Repetindo passos análogos, encontramos também o potencial $\mathbf{A}$:

- $$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{q\mathbf{v}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|(1-\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})/c}\right]_{t_{rp}}$$

- Estes acima são os potenciais de Liénard-Wiechert.

Campos de Liénard-Wiechert

- A partir destes potencias, podemos também encontrar os campos correspondentes, bastando derivar. Novamente, o tempo retardado torna as derivações um tanto mais trabalhosas.
- Usando $\mathbf{u} \equiv c\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \mathbf{v}$, os campos são:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathscr{r}}{(\boldsymbol{\mathscr{r}} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\mathscr{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

- Acima, todas as dependências temporais são com respeito ao tempo retardado, exceto quando a dependência em t estiver explícita.
- Nota-se que **E** e **B** dependem da aceleração da partícula **a**, e esse termo decai mais lentamente.

Campos de Liénard-Wiechert

- A partir destes potencias, podemos também encontrar os campos correspondentes, bastando derivar. Novamente, o tempo retardado torna as derivações um tanto mais trabalhosas.
- Usando $\mathbf{u} \equiv c\hat{\boldsymbol{\imath}} - \mathbf{v}$, os campos são:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\imath}{(\boldsymbol{\imath} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\imath} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Campo magnético gerado é sempre perpendicular ao campo elétrico.

- Acima, todas as dependências temporais são com respeito ao tempo retardado, exceto quando a dependência em t estiver explícita.
- Nota-se que **E** e **B** dependem da aceleração da partícula **a**, e esse termo decai mais lentamente.

Campos de Liénard-Wiechert

- A partir destes potencias, podemos também encontrar os campos correspondentes, bastando derivar. Novamente, o tempo retardado torna as derivações um tanto mais trabalhosas.
- Usando $\mathbf{u} \equiv c\hat{\boldsymbol{\imath}} - \mathbf{v}$, os campos são:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\imath}{(\boldsymbol{\imath} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\imath} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]$$

Exercício: fazer o exemplo 10.4

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Campo magnético gerado é sempre perpendicular ao campo elétrico.

- Acima, todas as dependências temporais são com respeito ao tempo retardado, exceto quando a dependência em t estiver explícita.
- Nota-se que **E** e **B** dependem da aceleração da partícula **a**, e esse termo decai mais lentamente.

Resolução de alguns exercícios de fixação de calibre

i) $V = 0$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$$
$$V' = V - \dot{\lambda}$$

Queremos mostrar que $\exists\, \lambda$ tal que $V' = 0$

Esta condição é acessível pois podemos fixar $\dot{\lambda} = V \Rightarrow V' = 0$.

Nota-se que $\lambda \to \lambda + f(\vec{r})$ não altera a relação anterior, i.e., $\dot{\lambda} = V$.

Logo $V = 0$ é acessível mas não fixa completamente o calibre.

viii) $V = 0$ e $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$

Vimos que $V = 0$ é acessível e deixa uma função $f(\vec{r})$ arbitrária.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2\lambda$$

Já usamos que $\dot{\lambda} = V$, logo a única arbitrariedade de λ é devida a uma função espacial aditiva

$$\lambda(\vec{r},t) = \lambda_V(\vec{r},t) + f(\vec{r}) \quad , \text{ em que } \dot{\lambda}_V = V.$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2\lambda_V + \nabla^2 f$$

Se $\vec{A}$ e λ_V não dependem de t

$\exists\, f$ tal que $\nabla^2 f = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \nabla^2\lambda_V$.

Contudo, como $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ e $\nabla^2\lambda_V$ podem depender de t, não há solução em geral para $\nabla^2 f = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \nabla^2\lambda_V$.

$\therefore V = 0$ e $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ não é um calibre acessível.

ii) $A_x = 0$

Queremos mostrar que $\exists\, \lambda$ tal que $A'_x = 0$.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$$

$$\therefore A'_x = A_x + \partial_x\lambda$$

Resolução de alguns exercícios de fixação de calibre

É acessível pois podemos escolher

$\partial_x \lambda = -A_x.$

Não fixa o calibre pois
$\lambda \to \lambda + f(y,z,t)$ também satisfaz a mesma
condição.