

Teoria Eletromagnética II

Parte 4 - Radiação e Relatividade (capítulo 11 e 12)

Prof. Davi C. Rodrigues
Período 2020/2 (EARTE)
Abril-Maio/2021

Introdução

- Na Parte 3 estabelecemos as equações de Maxwell em nova forma, em função dos potenciais e no calibre de Lorenz.
- Esta nova forma será mais útil para estudar o fenômeno da radiação, que está associado a partículas carregadas que são aceleradas, sendo essencial diferenciar o tempo t do tempo retardado t_r .
- Trataremos nesta Parte 4 das consequências das equações de Maxwell para a produção e absorção de ondas eletromagnéticas.
- Veremos ainda uma breve introdução de relatividade especial.
- Para começar esta parte, vamos desenvolver um pouco de intuição antes de irmos para o desenvolvimento mais técnico.



Vídeos originais em <https://www.youtube.com/watch?v=nFtNCPUMoYA>

<https://www.youtube.com/watch?v=xNTHbiKmwNQ> https://www.youtube.com/watch?v=FWCN_ul5ygY

Detalhes históricos dos experimentos de Hertz em <https://worldradiohistory.com/Archive-ITT/20s/ITT-Vol-06-1927-02.pdf>



Vídeos originais em <https://www.youtube.com/watch?v=nFtNCPUMoYA>

<https://www.youtube.com/watch?v=xNTHbiKmwNQ> https://www.youtube.com/watch?v=FWCN_ul5ygY

Detalhes históricos dos experimentos de Hertz em <https://worldradiohistory.com/Archive-ITT/20s/ITT-Vol-06-1927-02.pdf>

O que é radiação?

- Vimos que energia eletromagnética satisfaz uma equação da continuidade em que a corrente associada à energia é o vetor de Poynting.

$$\dot{u} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0.$$

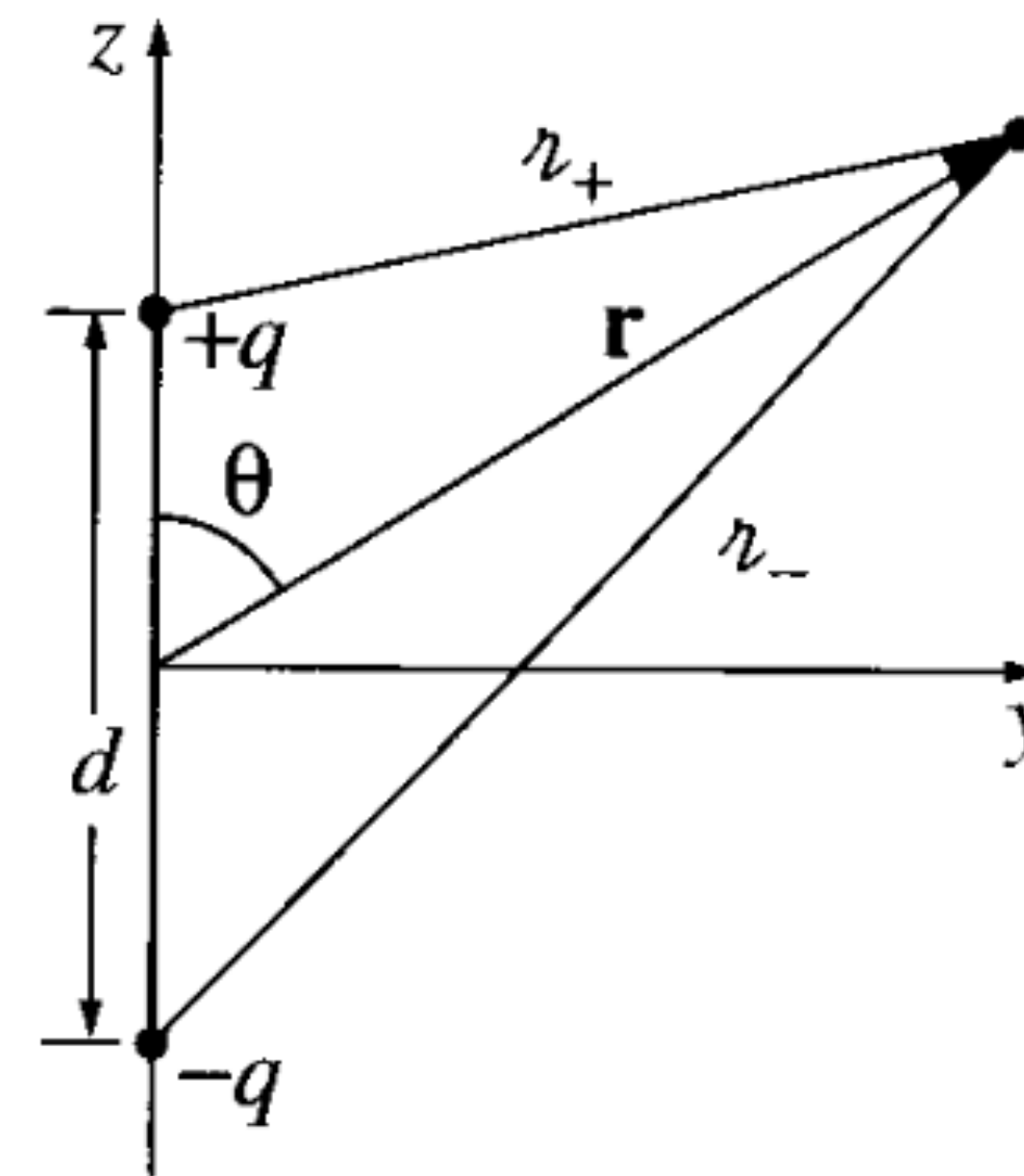
- Logo, a potência que cruza a superfície desse volume é

$$P = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\mu_0} \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}.$$

- **Exercício:** Verifique que P acima tem realmente dimensão de potência. Dica: encontre a dimensão de \mathbf{S} a partir da eq. da continuidade.
- A potência radiada é definida por $P_{\text{rad}} = \lim_{r \rightarrow \infty} P$.
- Nota-se que se forem usadas as expressões de \mathbf{E} e \mathbf{B} da eletrostática P_{rad} é necessariamente nulo. Esses últimos decaem cada um com r^{-2} , logo $P \sim r^{-2}$. Mas na eletrodinâmica vimos que há soluções em que \mathbf{E} e \mathbf{B} decaem com r^{-1} e conseqüentemente P pode ser constante.

Radiação de dipolo

- Como sabemos, configurações em que são fáceis de se fazer o experimento muitas vezes não são as mais fáceis de se calcular em detalhes.
- Aqui vamos considerar a radiação gerada por um dipolo particular, que tornará nossa análise teórica mais simples. Veremos depois que uma grande classes de dipolos levará aos mesmos resultados que vamos obter para este caso, desde que certas condições sejam observadas.
- Considere duas esferas que ficam fixas a uma distância d . Em dado instante, uma das esferas tem carga q e a outra carga $-q$, logo formando um dipolo.
- Considere ainda que há um fio condutor que liga essas esferas a um gerador.
- O gerador é tal que as cargas das esferas oscilam no tempo senoidalmente, contudo sempre mantendo a relação da carga de uma ser a carga oposta à outra. A carga de uma das esferas pode ser descrita por $q(t) = q_0 \cos(\omega t)$, a da outra então seria $-q(t)$.

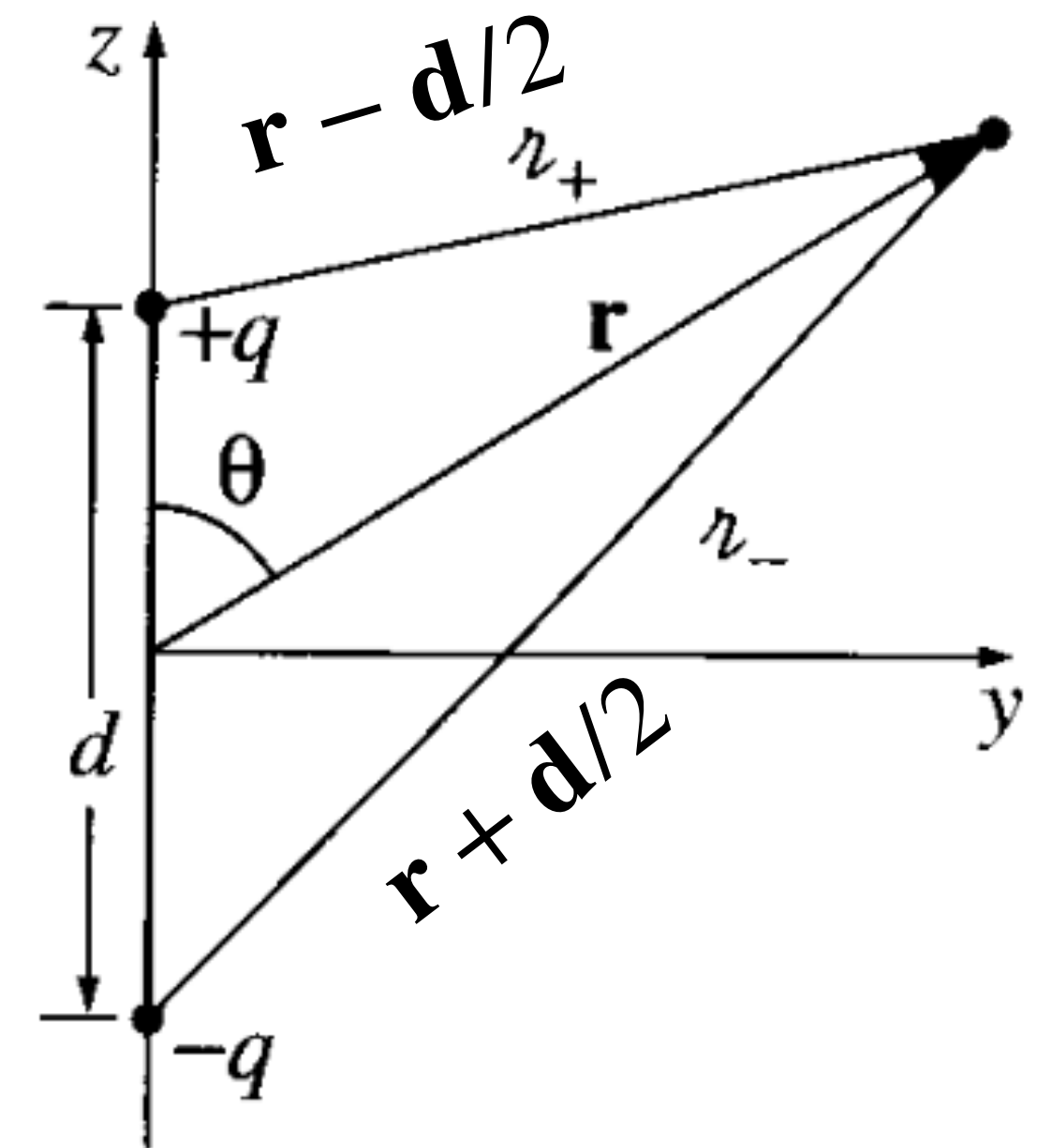


Radiação de dipolo

- Se desprezássemos os efeitos de tempo retardado, o potencial devido a essa configuração seria

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos(\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|} - \frac{\cos(\omega t)}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|} \right).$$

Não está explícito no desenho ao lado, mas o vetor $\mathbf{d}/2$ é o vetor posição da esfera que está com a carga $+q$ na figura.

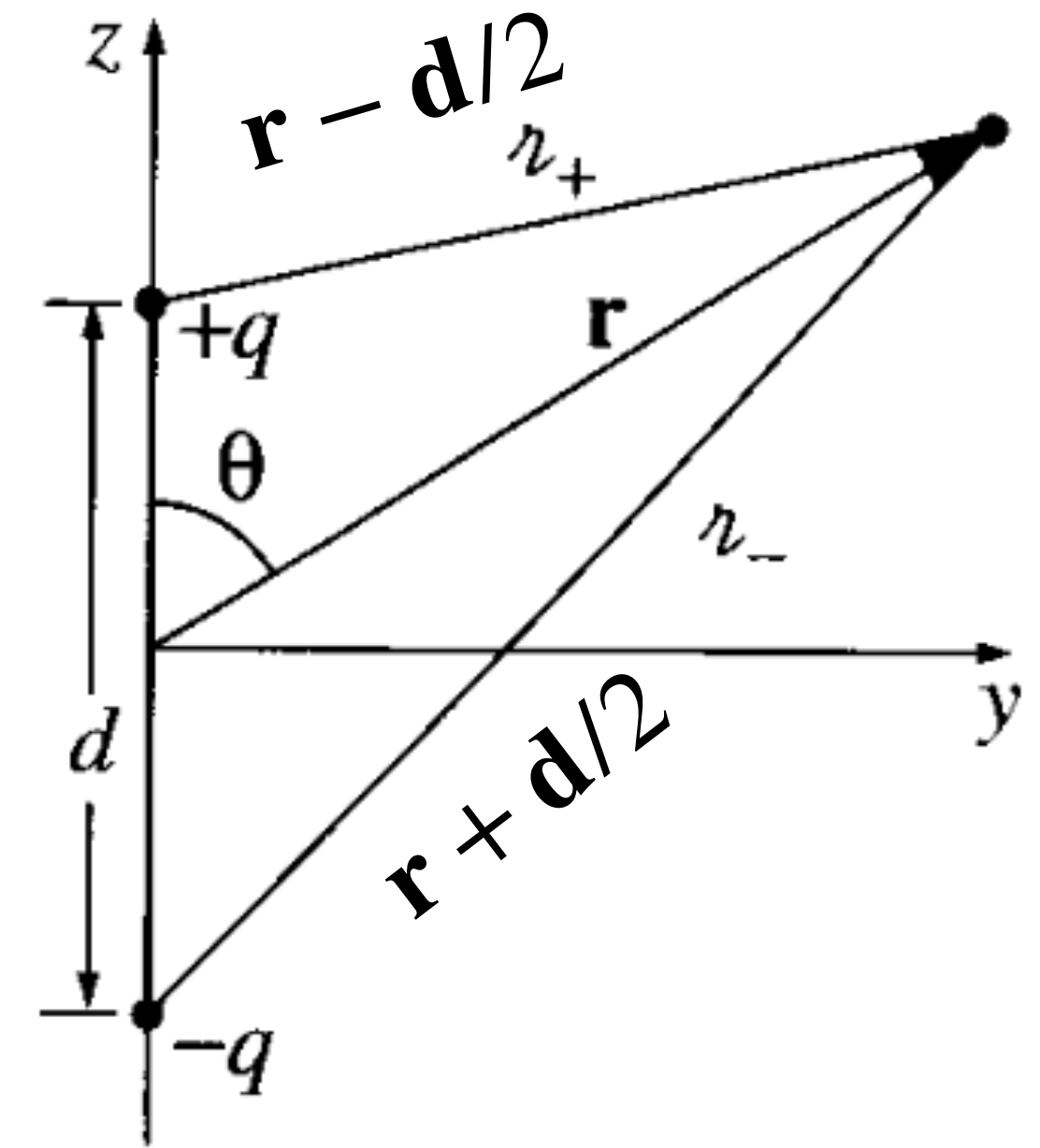


Radiação de dipolo

- Considerando os efeitos de tempo retardado, temos

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos(\omega t_{r+})}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|} - \frac{\cos(\omega t_{r-})}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|} \right).$$

- Acima,



Radiação de dipolo

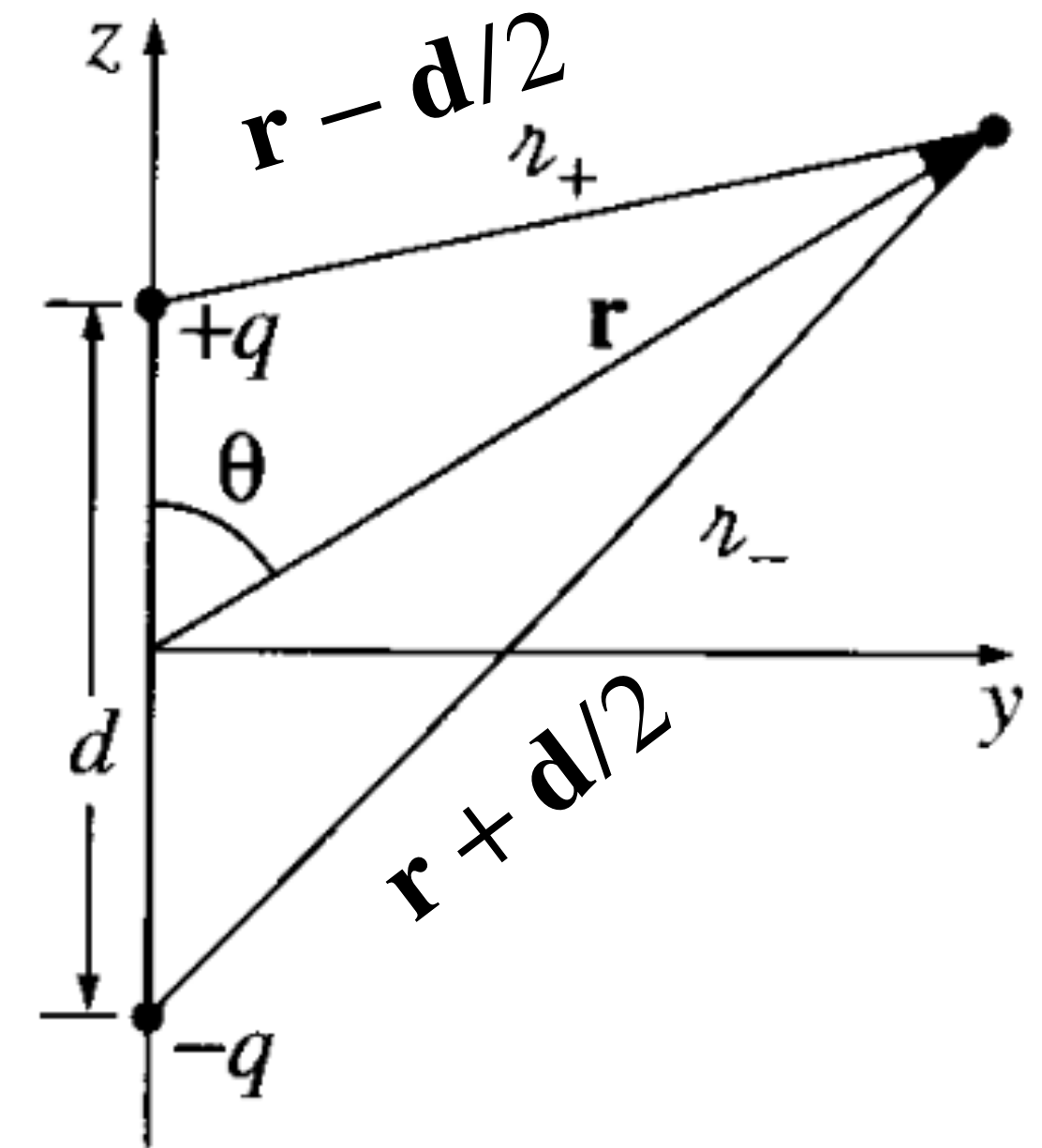
- Considerando os efeitos de tempo retardado, temos

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos(\omega t_{r+})}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|} - \frac{\cos(\omega t_{r-})}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|} \right).$$

- Acima,

$$t_{r+} = t - |\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|/c \quad \longrightarrow \quad \text{Tempo retardado da carga } q(t)$$

$$t_{r-} = t - |\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|/c \quad \longrightarrow \quad \text{Tempo retardado da carga } -q(t)$$



Radiação de dipolo

- Considerando os efeitos de tempo retardado, temos

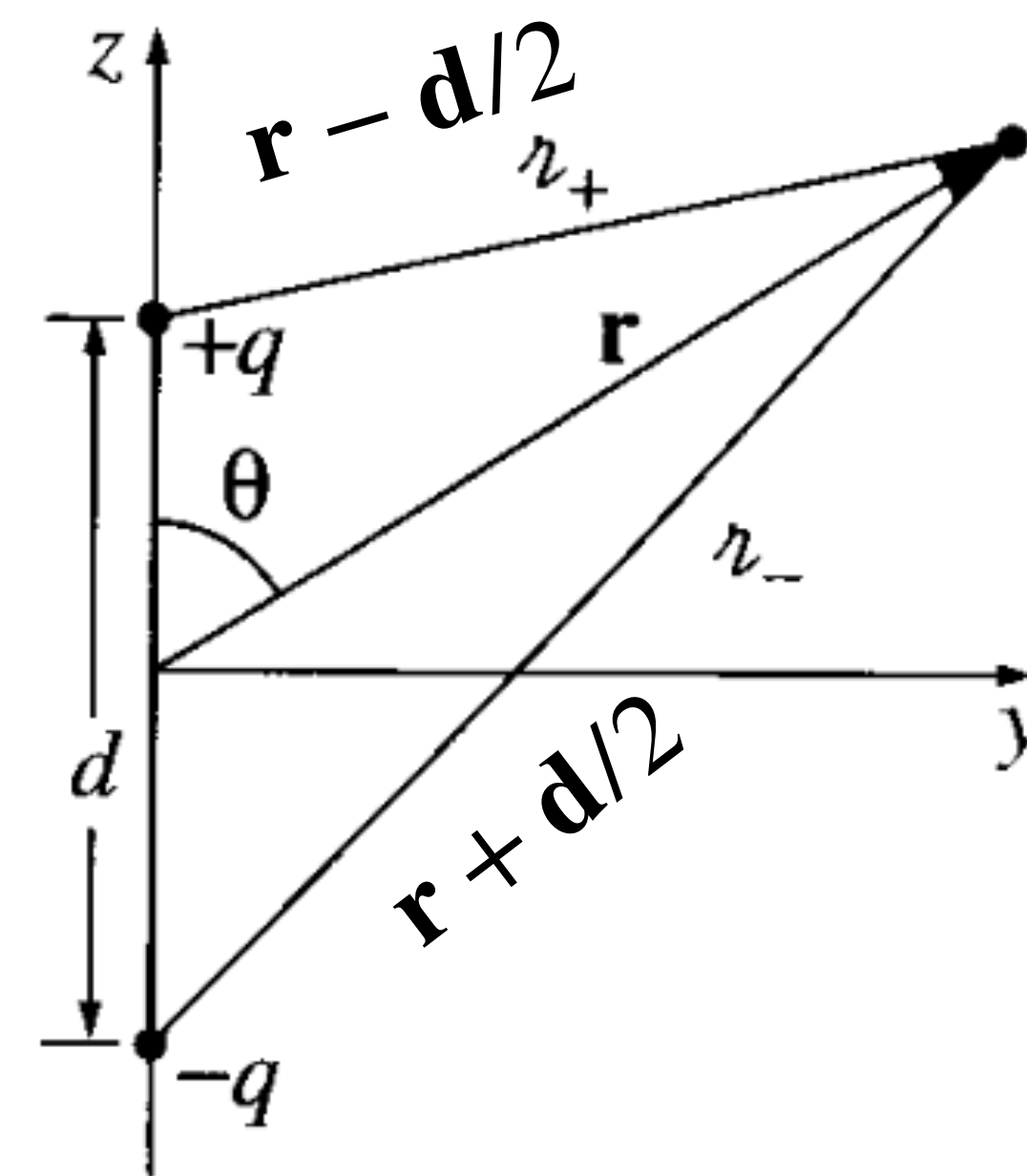
$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos(\omega t_{r+})}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|} - \frac{\cos(\omega t_{r-})}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|} \right).$$

- Acima,

$$t_{r+} = t - |\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|/c \quad \longrightarrow \quad \text{Tempo retardado da carga } q(t)$$

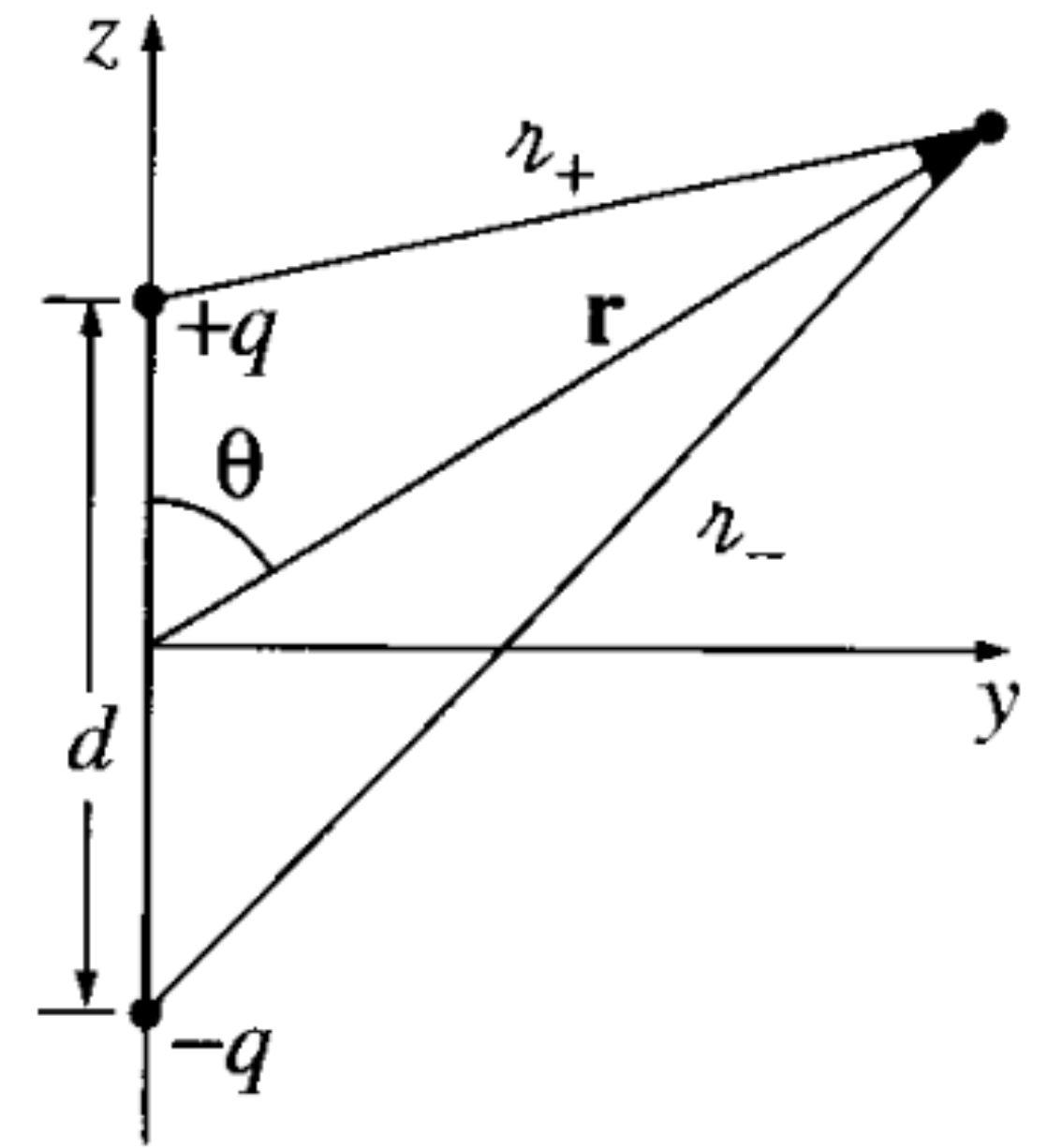
$$t_{r-} = t - |\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|/c \quad \longrightarrow \quad \text{Tempo retardado da carga } -q(t)$$

- Próximo a este dipolo os campos irão refletir toda a estrutura (talvez peculiar) deste dipolo. Contudo, longe desse dipolo é razoável que os detalhes da construção dele não sejam relevantes e vários diferentes tipos de dipolos (acelerados) levem à mesma radiação.
- Veremos agora as aproximações necessárias que tornam os detalhes deste dipolo irrelevantes e que definem a chamada zona de radiação.



Dipolo perfeito e zona de radiação

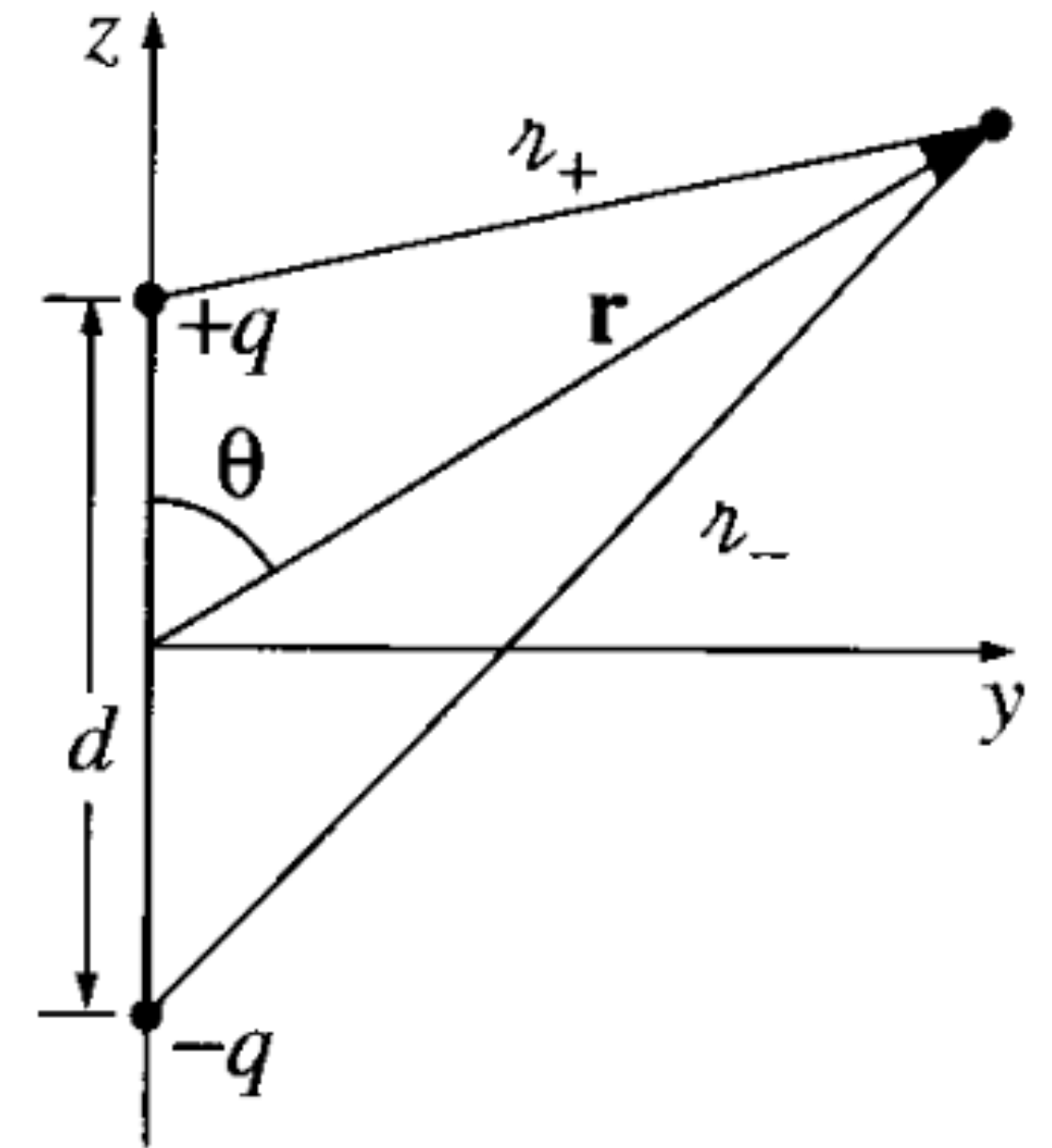
- Se analisarem bem este problema verão que ele possui 3 escalas de distância. Saberiam indicá-las?



Dipolo perfeito e zona de radiação

- Se analisarem bem este problema verão que ele possui 3 escalas de distância. Saberiam indicá-las?
 - r
 - d
 - $c/\omega \sim \lambda$
- Para tratarmos de radiação de dipolo perfeito, deve-se estar suficientemente distante da fonte e muitos comprimentos de onda devem estar entre a fonte e o ponto de observação, logo: $r \gg d$ e $r \gg c/\omega$ (zona de radiação).
- Nota-se que o caso $d \sim c/\omega$ implica que as cargas elétricas precisam ir de um extremo ao outro das esferas com velocidade próxima de c . Assim, considerando $d \ll c\omega$,

$$r \gg \lambda \gg d.$$



Radiação de dipolo: potenciais

- Usando essa aproximação, mas especificamente primeiro usando $r \gg d$, depois $d \ll c/\omega$ e por fim $r \gg c/\omega$, encontramos:

- $$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos(\omega t_{r+})}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|} - \frac{\cos(\omega t_{r-})}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|} \right) \approx -\frac{q_0 d \omega \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c r} \sin [\omega(t - r/c)].$$

- Para encontrar o campo elétrico, precisamos também do potencial vetor. Esse advém da corrente que liga uma esfera à outra e, nesta aproximação a solução é

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\mathbf{z}}.$$

- **Exercício para nota (faz parte da P4):** Faça as passagens acima para encontrar V e \mathbf{A} .

Radiação de dipolo elétrico: campos E e B

(ver o livro também, segue parte das contas)

Vimos na última aula que

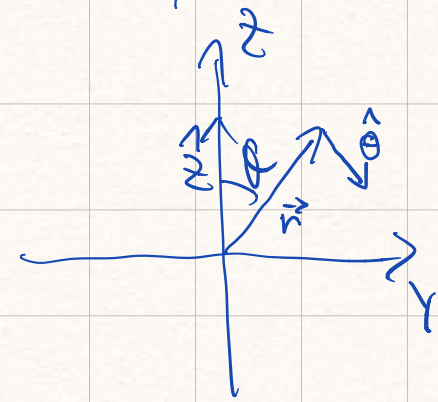
$$V(\vec{r}, \theta, t) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\cos\theta}{r} \sin[\omega(t - r/c)]$$

$$\vec{A}(\vec{r}, \theta, t) = \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \overbrace{\sin[\omega(t - r/c)]}^{A_z} \hat{z}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \dot{\vec{A}}$$

Como $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$,

$$\hat{z} = \cos\theta \hat{r} - \hat{\theta} \sin\theta$$



$$A_\theta = 0, \quad \partial_\theta \vec{A} = 0 \text{ e}$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left(\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r \right) \hat{\phi}$$

Logo

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\partial_r \left(r \overbrace{A_\theta}^{A_z \sin\theta} \right) - \partial_\theta \left(\overbrace{A_r}^{A_z \cos\theta} \right) \right] \hat{\phi}$$

$$\partial_r A_\theta = \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r^2} \sin[\omega(t - r/c)] + \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \times$$

$$\times \cos[\omega(t - r/c)] \frac{\omega}{c}$$

$$\partial_\theta A_r = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\underbrace{-\sin\theta A_z}_{A_z \sin\theta} - r \sin\theta \left(\underbrace{-\frac{A_z}{r}}_{-\frac{A_z \cos\theta}{r}} - \frac{A_z \cos[\omega(t - r/c)] \omega}{\sin[\omega(t - r/c)] c} \right) + \right. \\ \left. + A_z \sin\theta \right] \hat{\phi}$$

$$= \left[\frac{-\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \cos[\omega(t - r/c)] \sin\theta - \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r^2} \sin[\omega(t - r/c)] \sin\theta \right] \hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin\theta \left(-\cos[\omega(t - r/c)] - \frac{\sin[\omega(t - r/c)]}{r} \right) \hat{\phi}$$

Usando que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \dot{\vec{A}}$, vem

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta}$$

$$\boxed{r \gg \lambda \gg d} \leftarrow$$

$$\text{Como } \vec{r} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \text{ vem}$$

$$\langle \cos^2 x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}$$

Radiação de dipolo elétrico: fluxo de energia, vetor de Poynting (ver o livro também, segue parte das contas)

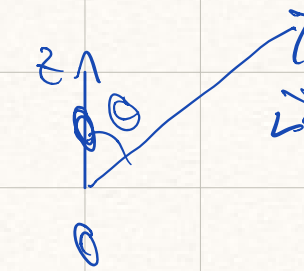
$$\vec{S} = \frac{\mu_0}{c} \left(\frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \cos(\omega(t - r/c)) \right)^2 \hat{r}$$

Lembrar que $\vec{E} \propto \hat{\theta}$ e $\vec{B} \propto \hat{\phi}$ e

$$\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}$$

Tomando a média no tempo,

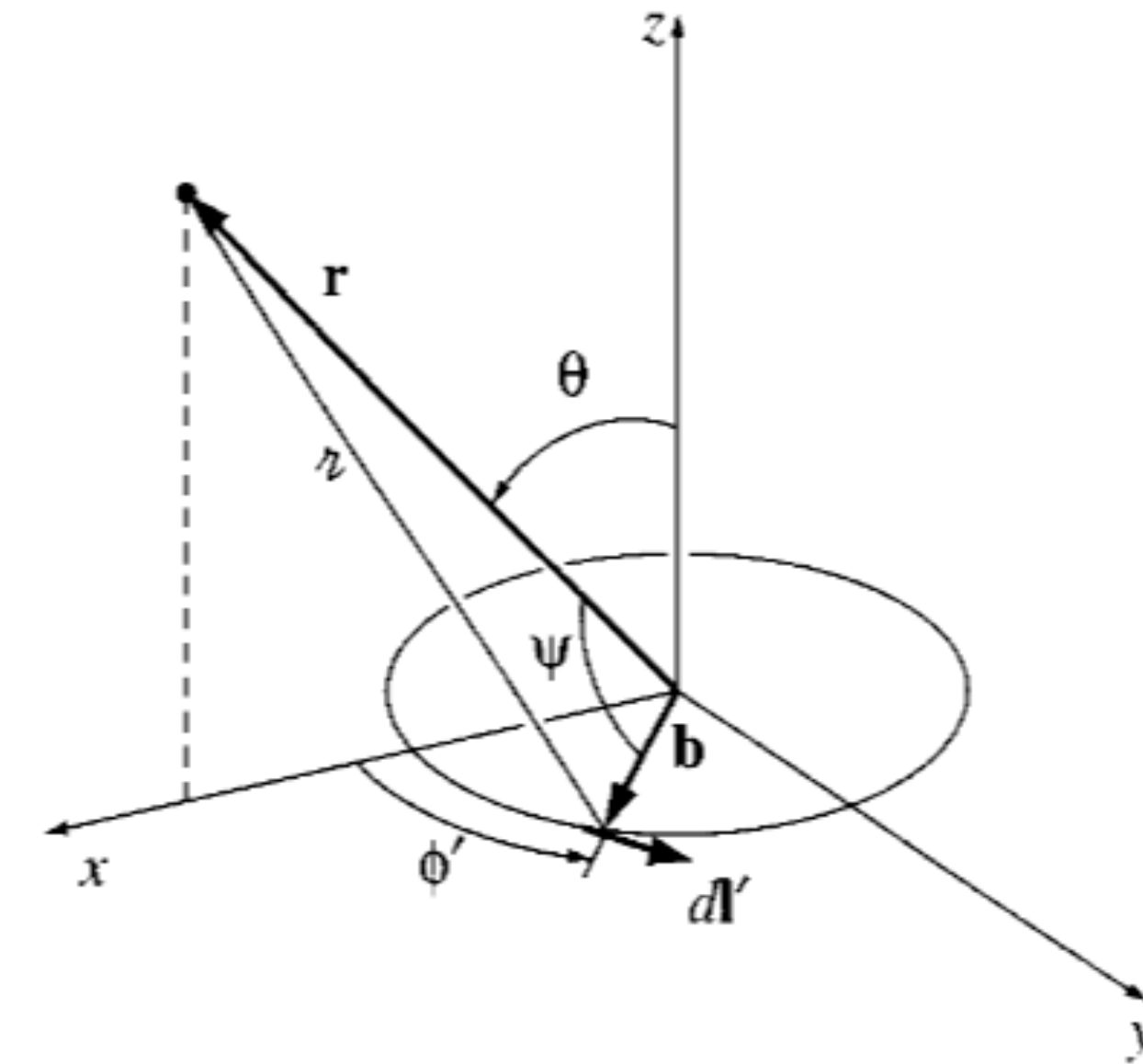
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0}{c} \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$



Note que $\langle \vec{S} \rangle$ é máximo p/ $\theta = \pi/2$ e
 $\langle \vec{S} \rangle = 0$ p/ $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Nessas direções
 não há energia transmitida!

Radiação de dipolo magnético

- Apresentado durante a aula ao vivo.
- As antenas em *loop* utilizam este princípio.



Antena de rádio AM



Antena de TV.
O loop é para UHF, as hastes para VHF.

Radiação de fonte arbitrária e antenas

- **Exercício para nota (i.e., será cobrado na P4).** Fazer a seção de “radiação de fontes arbitrárias” em detalhes. Encontrar os potenciais, os campos elétrico e magnético e, por fim, apresentar a potência irradiada. Está feito no livro. Para compreender bem, antes estude os dois casos anteriores.

- **Exercício desafio (1,5 pontos extra):** Explique o funcionamento de uma antena tipo Yagi-Uda. As antenas externas e antigas comumente usadas para recepção de sinais de TV são desse tipo. Em particular, quais os prós e contras desse tipo de antena com respeito a uma simples antena dipolar? Qual a razão desse espaçamento e comprimento das hastes?



Este exercício deve ser apresentado até a última aula da matéria. A menos que haja mais de uma

Radiação por partículas pontuais

- Vimos que os campos elétrico e magnéticos gerados por uma partícula carregada em movimento são

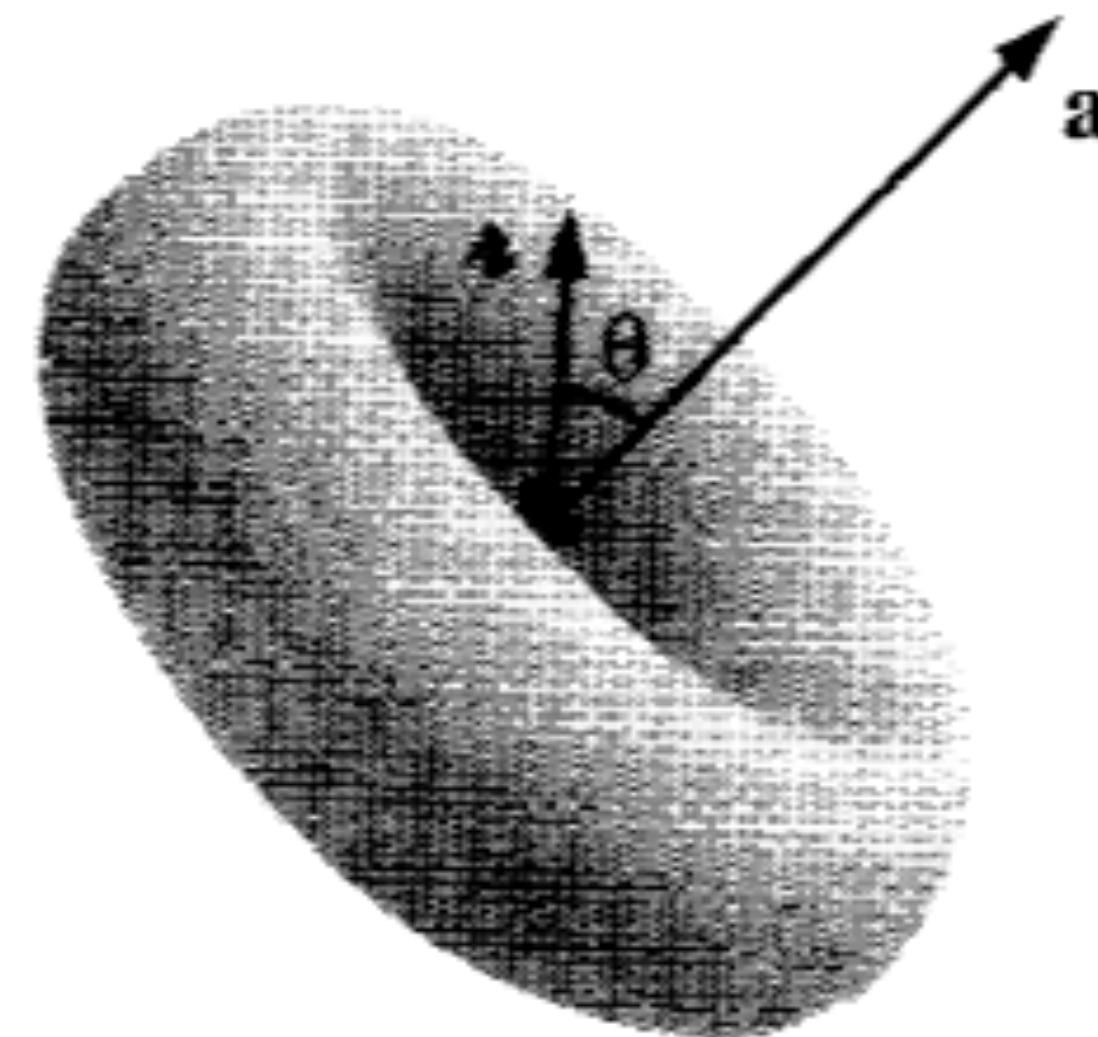
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{(r \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

em que $\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}$.

Parte relevante para a radiação.

- Considerando que a partícula está inicialmente em repouso, calculando o vetor de Poynting para a parte de radiação somente, encontra-se

$$\mathbf{S}_{\text{rad}} \propto q^2 a^2 \frac{\sin^2 \theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \widehat{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}$$



Radiação emitida como um toróide perpendicular à aceleração.

Reação à radiação

- Se uma partícula carregada acelera, vemos que ela emitirá radiação. Contudo, a situação é mais complicada. Radiação tem momento, assim a aceleração da partícula gera radiação, mas a radiação também acelera a partícula.
- Embora a gravitação seja consistente com sistemas estáveis com órbitas circulares ao redor de um ponto massivo; não há análogo estável para a eletrodinâmica. Isto pois, órbitas fechadas (circulares em particular) requerem aceleração centrípeta, logo a carga teste que circularia a carga central estaria constantemente emitindo radiação, cujo impacto tem de ser a redução da velocidade da partícula, e conseqüentemente a instabilidade da órbita. É por isso que um átomo clássico, com elétrons em torno de um núcleo positivo, é impossível de ser estável.
- Uma forma aproximada de descrever a reação à radiação é por meio da equação de Lorentz-Abraham. Tem uma "dedução" no Griffiths a partir de conservação de energia, mas a dedução do Zangwill está melhor contextualizada. Essa equação é dada por

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + m\tau_0\dot{\mathbf{a}}, \quad \text{com} \quad \tau_0 = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi m c}.$$

Esta equação tem algo de bem exótico: depende de $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{a}}$, e isso traz problemas...

Um pouco mais sobre a eq. de Abraham-Lorentz

- A equação de Abraham-Lorentz (AL) só pode ser usada como um aproximação.
- **Exercício:** Considere uma partícula de carga q que sobre uma aceleração a_0 em $t = 0$. Para $t > 0$, assuma que a única aceleração sofrida pela partícula se deve à força de AL. Mostre que a aceleração da partícula $a(t)$ cresce exponencialmente. Logo, esta solução não pode ser física de forma geral, no máximo é válida sob certos limites.
- A correção relativística da eq. de AL é a eq. de Abraham-Lorentz-Dirac. Para uma introdução sobre esta (além da matéria deste curso) ver <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9912045>
- Há a eq. de reação devido a Landau e Lifshitz, que coincide com AL somente para $a/\dot{a} \gg \tau_0$. Ver Zangwill.
- Alguns testes experimentais são de difícil execução. Por outro lado, é óbvio que os efeitos da força de reação não podem crescer arbitrariamente, como indicado no exercício acima.
- **Exercício para nota (faz parte da P4):** Problema 11.17 do livro.

Relatividade especial e eletrodinâmica

Veremos....

Equações de Maxwell
em função dos potenciais

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

$$\partial_{\mu}F^{\nu\mu} = \mu_0 J^{\nu}$$

Postulados de Relatividade especial

- Lembrete dos postulados:
 - 1. As leis da física são indistinguíveis em todos os sistemas inerciais (i.e., sistemas de referência não acelerados)
 - 2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores
- Estes postulados são pilares da relatividade especial. O primeiro tem várias formas diferentes de ser expressado, mas com a mesma essência. Detalhe: estes são pilares, mas é falso que esses postulados sejam suficientes para deduzir toda a relatividade especial.
- Consequências imediatas: i) velocidades não podem ser somadas como usual; ii) simultaneidade entre dois eventos depende do referencial; ii) noções de distância e de duração não podem ser invariantes.
- Entender um pouco da geometria de Minkowski ajuda muito para entender relatividade especial

Coordenadas do espaço-tempo

- Num espaço cartesiano, vamos denotar as coordenadas espaciais correspondentes por x^1, x^2, x^3 . Pode-se usar $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, contudo não usaremos essa notação com x, y, z .
- Pode parecer estranho usar índices em cima, quando vocês devem estar acostumados com índices embaixo. Irei justificar essa escolha mais tarde, pois veremos que precisaremos de dois tipos de índices, os que são colocados em cima e os embaixo.
- O tempo é designado pela coordenada t , e é conveniente introduzir $x^0 = ct$. Dessa forma, todas as coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3 têm a mesma dimensão, ou seja, de espaço.
- O uso de c acima nada tem de especial, é simplesmente uma constante com dimensão de velocidade: pode converter algo com dimensão temporal em dimensão espacial.
- É comum usar as letras gregas μ e ν para designar valores de índices de 0 a 3, enquanto i e j são usados para as componentes espaciais somente, ou seja, de 1 a 3.
- $\{x^\mu\}$ é o conjunto de todas as coordenadas. (x^μ) é a matriz formada pelas coordenadas.

Vetores do espaço-tempo

- Tal como no espaço euclidiano, podemos introduzir uma base vetorial. Vamos denotar seus elementos por pelo conjunto $\{\mathbf{e}_\mu\}$.
- Comparando com a notação usual no espaço euclidiano, temos: $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{i}}, \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{j}}, \mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{k}}$. O novo vetor \mathbf{e}_0 naturalmente não pode ser visualizado no espaço tridimensional, mas faz parte de um espaço 4D.
- A partir da definição das coordenadas x^μ , podemos definir um vetor infinitesimal $d\mathbf{x}$, que é dado pela diferença entre os pontos com coordenadas x^μ e $x^\mu + dx^\mu$. Ou seja $d\mathbf{x} = \sum_{\mu} dx^\mu \mathbf{e}_\mu$. Um vetor qualquer \mathbf{A} pode ser escrito como $\mathbf{A} = \sum_{\mu} A^\mu \mathbf{e}_\mu$, ou simplesmente $\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu$ (agora usando a regra da soma sobre índices repetidos).
- Vamos agora introduzir um produto interno, e aqui entra finalmente a diferença entre um espaço euclidiano 4D e um espaço de Minkowski 4D. O produto interno entre os elementos da base vetorial é dado por $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \eta_{\mu\nu} \neq \delta_{\mu\nu}$.

Vetores do espaço-tempo

- $\eta_{\mu\nu}$ é chamado de métrica de Minkowski. Veremos em breve a definição explícita de $\eta_{\mu\nu}$.
- Usando que $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$, e sendo \mathbf{A} e \mathbf{B} dois vetores no espaço de Minkowski, temos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (B^\nu \mathbf{e}_\nu) = A^\mu B^\nu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = A^\mu B^\nu \eta_{\mu\nu}.$$

- Note que o resultado acima é o resultado do espaço euclidiano se $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{\mu\nu}$. Pois, para este último caso teríamos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} |_E = A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 = A^0 B^0 + A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

- Podemos calcular o produto escalar do vetor \mathbf{dx} com ele mesmo e isso fornece uma distância infinitesimal no espaço de Minkowski, a saber

$$ds^2 \equiv \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Distância invariante

- As definições e contas que usamos para chegar em

$$ds^2 \equiv \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

são simples. Mas qual a importância de ds^2 ?

- Tal como comentamos na introdução, não há na relatividade especial uma noção de distância tridimensional ou intervalo temporal que seja preservado entre referenciais diferentes: lembrar da contração espacial e da dilatação temporal que vocês devem ter visto em Física 4.
- Sendo $\eta_{\mu\nu}$ dado pela matriz abaixo, **todos os referenciais** vão concordar com o valor do comprimento ds^2 .

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} ds^2 &= - (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ ds^2 &= - (dx^0)^2 + d\vec{x}^2 \end{aligned}$$

Transformações de Lorentz

- As transformações de Lorentz são transformações lineares, ou seja, elas podem ser escritas na forma

$$d\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu.$$

A matriz (Λ^μ_ν) é matriz constante. Estou usando uma barra sobre a coordenada transformada.

Por que Λ tem um índice em cima e outro embaixo? Dessa forma a atuação de Λ sobre a componente de um vetor, no caso dx^ν , leva à componente de outro vetor (logo com índice livre em cima), $\Lambda^\mu_\nu dx^\nu$. Note que $\eta_{\mu\nu}$ associa dois vetores a um escalar: $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

- Um caso particular mas bastante estudado de transformação de Lorentz é o seguinte:

$$\bar{x}^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

$$\beta \equiv v/c$$

$$\bar{x}^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0)$$

$$\bar{x}^2 = x^2$$

$$\bar{x}^3 = x^3$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

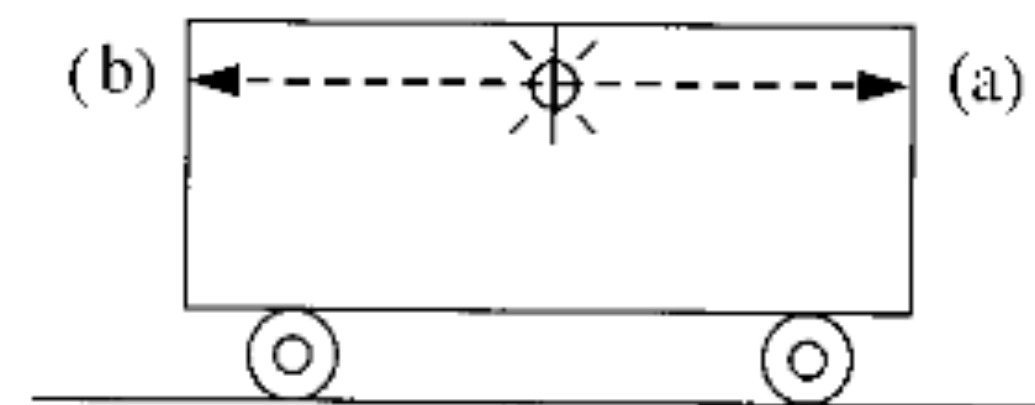


Figure 12.4

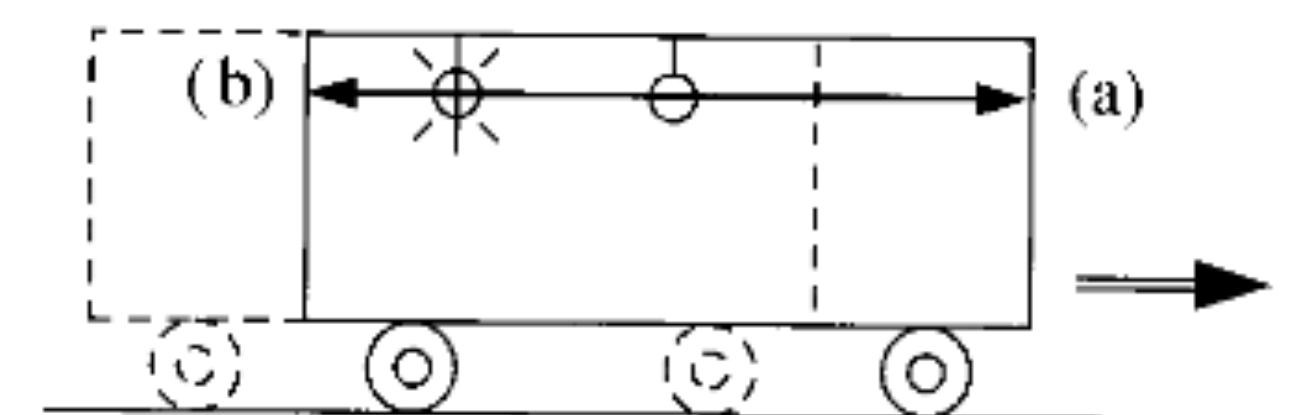


Figure 12.5

Transformações de Lorentz

- As transformações de Lorentz são transformações lineares, ou seja, elas podem ser escritas na forma

$$d\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu.$$

A matriz (Λ^μ_ν) é matriz constante. Estou usando uma barra sobre a coordenada transformada.

Por que Λ tem um índice em cima e outro embaixo? Dessa forma a atuação de Λ sobre a componente de um vetor, no caso dx^ν , leva à componente de outro vetor (logo com índice livre em cima), $\Lambda^\mu_\nu dx^\nu$. Note que $\eta_{\mu\nu}$ associa dois vetores a um escalar: $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

- Um caso particular mas bastante estudado de transformação de Lorentz é o seguinte:

$$\bar{x}^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

$$\beta \equiv v/c$$

$$\bar{x}^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0)$$

$$\bar{x}^2 = x^2$$

$$\bar{x}^3 = x^3$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$(\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformações de Lorentz

- A transformação de Lorentz anterior é um caso particular. Rotações no espaço, por exemplo, são também transformações de Lorentz. O que são transformações de Lorentz em geral?
- Pelo primeiro postulado da relatividade especial, todas as leis da física devem ser as mesmas em qualquer referencial inercial. Dado um referencial inercial, uma infinidade de outros pode ser encontrado por transformações de Lorentz. O que essas transformações têm em comum? Todas elas preservam a geometria do espaço tempo, que neste caso é dado pela métrica de Minkowski.
- **Exercício:** Verifique diretamente que as transformações de Lorentz apresentadas no slide anterior preservam a métrica de Minkowski. Ou seja, mostre que

$$\Lambda_{\lambda}^{\mu} \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\kappa}^{\nu} = \eta_{\lambda\kappa}.$$

- De forma geral, transformações de Lorentz são transformações de coordenadas no espaço-tempo que não alteram a métrica de Minkowski (no sentido da eq. acima).

Transformações de Lorentz

$$\Lambda_{\lambda}^{\mu} \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\kappa}^{\nu} = \eta_{\lambda\kappa}.$$

- Consequentemente, nota-se que ds^2 é preservado por transformações de Lorentz:

$$ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = \eta_{\mu\nu} d\bar{x}^{\mu} d\bar{x}^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\kappa}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} dx^{\kappa} dx^{\sigma} = \eta_{\kappa\sigma} dx^{\kappa} dx^{\sigma} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = ds^2$$

- Esse último resultado é um caso particular do seguinte: escalares não mudam por transformações de coordenadas. ds^2 é um escalar e transformações de Lorentz são transformações de coordenadas. O que as transformações de Lorentz têm de especial não é a preservação de ds^2 , mas sim a preservação de $\eta_{\mu\nu}$.
- Em relatividade especial, somente transformações de coordenadas que preservam a métrica de Minkowski são consideradas. Assim, todos os sistemas de referência inerciais têm a mesma métrica e as mesmas leis da física (no sentido restrito do primeiro postulado).
- **Exercício:** Considere que um feixe de luz é emitido no ponto A do espaço e no instante $t = t_i$. Esse feixe se propaga livremente, sendo absorvido no instante $t = t_f$ e no ponto B. Encontre Δs^2 (a distância finita entre dois eventos). Outro referencial poderia encontrar outro valor para Δs^2 ?

Transformações de Lorentz

- **Exercício para nota (faz parte da P4):**

i) Certo observador vê dois eventos simultâneos e que são separados por 30 nano segundos de distância (ou seja, 30 nano segundos-luz). Em metros, quanto vale essa distância?

ii) Qual o valor do intervalo do espaço-tempo correspondente a esses eventos?

iii) Outro observador percebe estes mesmos eventos como não simultâneos, um deles ocorrendo 5 nano segundos antes do outro. Qual a distância espacial entre esses eventos segundo esse segundo observador?

iv) Seria possível determinar a velocidade relativa entre esses observadores?

Tempo próprio

- Defini-se o tempo próprio τ por $d\tau^2 \equiv - ds^2/c^2$.
- Acima temos a definição completa de tempo próprio, mas é útil saber o que motiva esse nome.
- Considere que uma espaçonave vai a uma estrela próxima e volta à Terra. Imagine que a trajetória seja essencialmente uma linha reta medida com uma coordenada r . O intervalo do espaço-tempo associado à viagem de ida foguete é
$$\Delta s^2 = - (\Delta_T x^0)^2 + \Delta_T r^2 = - c^2 \Delta_T t^2 + \Delta_T r^2 .$$
O índice T é usado para indicar que é o intervalo medido pela Terra. Por outro lado, para o referencial do Foguete,
$$\Delta s^2 = - c^2 \Delta_F t^2 ,$$
pois para o foguete ele está parado, logo $\Delta_F r^2 = 0$. Comparando com a definição de τ , vemos que, para uma variação infinitesimal do tempo medido no foguete, temos $d_F t = d\tau$.

Quadrivelocidade

- Definimos quadrivelocidade de qualquer partícula que se mova com velocidade abaixo da luz por $U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$. — Questão: por que a velocidade da luz precisa de uma definição diferente?
- Muitas vezes é possível e útil usar $U^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{c} U^0 \frac{dx^\mu}{dt}$.
- Como definir o quadrado da quadrivelocidade? A resposta é a seguinte: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = U^\mu \eta_{\mu\nu} U^\nu$.
- A trivelocidade, que é a velocidade que tratávamos comumente durante o curso é $v^i = \frac{dx^i}{dt}$. E sabemos que $0 < v^2 < c^2$. Curiosamente, o quadrado da quadrivelocidade de qualquer partícula que se mova a velocidade abaixo da luz vale sempre $-c^2$.
- **Exercício:** Demonstre a afirmativa acima.
- Observação: Existe um motivo geométrico para definir U^μ usando $d\tau$ ao invés de dt .

Quadrivelocidade

- Vimos que $U^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{c} U^0 \frac{dx^\mu}{dt}$. Podemos desenvolver mais isto, expressando U^μ em função de v^i se encontramos U^0 .
- Como $U^\mu U^\nu \eta_{\mu\nu} = -c^2$, temos que

$$-(U^0)^2 + U^i U^j \delta_{ij} = -c^2,$$

logo, como $U^i = U^0 v^i / c$ e $v^i v^j \delta_{ij} / c^2 = v^2 / c^2 = \beta^2$,

$$(U^0)^2 (-1 + \beta^2) = -c^2.$$

Assim, temos

$$\frac{U^0}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma.$$

E concluímos que $(U^\mu) = (\gamma c \quad \gamma v^i) = \gamma (c \quad v^i)$.

Quadricorrente

- A quadricorrente é um vetor no espaço-tempo que é dado por $J^\mu = \rho_0 U^\mu$, em que ρ_0 é a densidade de carga observada em um referencial em repouso. Estou aqui usando a mesma notação do livro para este ρ_0 . A questão de estar ou não estar em repouso é relevante pois densidade de carga é carga sobre volume, e referenciais diferentes medem volumes diferentes.
- Denotaremos as componentes da corrente usual (tricorrente) por $j^i = \rho v^i$, com $\rho = \gamma \rho_0$ (ρ é a densidade de carga observada por em um referencial qualquer).
Logo $(J^\mu) = \gamma(\rho_0 c \quad \rho_0 v^i) = (\rho c \quad j^i)$.
- **Exercício:** Verifique que a equação da continuidade é dada por $\partial_\mu J^\mu = 0$. Obs.: $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$.

Quadripotencial e índices em cima ou embaixo

- Seja A^μ as componentes de um vetor no espaço-tempo, com $(A^\mu) = (V/c \ A^i)$. Veremos que V e A^i serão o potencial escalar e o potencial vetor que lidávamos antes.
- Antes de avançar, vamos introduzir uma notação que é muito comum e conveniente.
 - $\eta_{\mu\nu}$ usamos para as componentes do tensor métrico (métrica de Minkowski).
 - Vamos introduzir agora $\eta^{\mu\nu}$ como as componentes da inversa da matriz $(\eta_{\mu\nu})$. Quando as coordenadas canônicas de Minkowski forem usadas, $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$. Para outras coordenadas isso é falso.
 - Qualquer vetor definido com índice em cima pode ser transformado num vetor com índice embaixo usando a métrica: $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$. Logo, em coordenadas canônicas, $A^0 = -A_0$, $A^1 = A_1$, $A^2 = A_2$...
 - O análogo vale o seguinte caso: $B^\mu = \eta^{\mu\nu} B_\nu$.
 - O produto escalar de dois vetores pode ser expresso por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = A^\mu U^\nu \eta_{\mu\nu} = A_\mu U^\mu$.
- Para o caso do quadripotencial acima definido, temos $(A_\mu) = (-V/c \ A_i) = (-V/c \ A^i)$.

Tensor eletromagnético

- Precisamos agora indicar como encontrar os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} a partir dos potenciais, e tudo num contexto geométrico adequado.
- Considerando o que vimos de quadri-velocidade, quadri-corrente, quadri-potencial... Pode parecer natural que agora iremos introduzir um “quadri-campo elétrico”, mas isso não existe.
- É de se esperar que \mathbf{E} e \mathbf{B} não correspondam a componentes espaciais de vetores no espaço-tempo, dado que transformações de Lorentz, como sabemos, trocam o que é \mathbf{E} e \mathbf{B} . Por exemplo, ao fazermos uma transformação de Lorentz, as componentes da quadri-corrente J^μ mudam, a saber: $J^\mu = \Lambda^\mu_\nu J^\nu$. Contudo, ela segue sendo uma quadri-corrente e suas componentes espaciais seguem sendo a tri-corrente. O caso de \mathbf{E} e \mathbf{B} é bem diferente: \mathbf{B} por ser **criado** devido a uma transformação de Lorentz. Assim, a natureza geométrica deles em Minkowski é diferente de quadri-vetores.
- Seja $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Este é chamado de tensor eletromagnético. Veremos o motivo....

Tensor eletromagnético

- **Exercício para nota (faz parte da P4):**

i) Usando as definições anteriores, mostre que

$$(F^{\mu\nu}) = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Mostre que as equações de Maxwell, quando escritas em função dos potenciais, se reduzem a uma única equação na forma tensorial, a saber: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = kJ^\nu$, em que k é uma constante. Encontre o valor de k .

iii) Na notação tensorial, como é expresso o calibre de Lorenz? Expresse $\partial_\mu F^{\mu\nu} = kJ^\nu$ nesse calibre.

- É interessante notar que nessa notação a equação da continuidade é uma consequência imediata. Basta notar que $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} = -\partial_\kappa \partial_\sigma F^{\kappa\sigma} = -\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$.

Força de Lorentz

- Para concluir, falemos brevemente da força de Lorentz.
- Uma força no espaço de Minkowski é definida por meio de $K^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}$. — Poderia-se usar F^μ , mas como $K^i \neq F^i$ (verifique) estou seguindo a definição do livro e usando K .
- Acima, $P^\mu = mU^\mu$ é o quadrimomento (a componente temporal é a energia, a espacial é essencialmente o momento espacial). **Exercício:** A partir dessas observações sobre P^μ , deduza que, num referencial em repouso com respeito à partícula, $E = mc^2$.
- A força de Lorentz simplesmente é dada por
$$K^\mu = qF^\mu{}_\nu U^\nu.$$
- **Exercício:** Verifique que a força de Lorentz que vimos pode ser escrita na forma acima (está feito no livro).